SEKANTENRÄUME VON KURVEN

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Philosophischen Fakultät II

der Universität Zürich

von

Joachim von zur Gathen

aus Deutschland

1981

Begutachtet von Herrn Prof. Dr. V. Strassen

Zürich 1980

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41507212_0016

Lebenslauf

Name: Joachim Paul Rudolf von zur Gathen

Staatsangehörigkeit: deutsch

Geburt: 14.2.1950 in Solingen, Deutschland

Schule: Gymnasium 1960-1968 in Solingen, Abitur 1968

Studium: Mathematik 1968-1973 an der ETH Zürich, Diplom in Mathematik 1973

Vorlesungen besucht von: W. Baur, P. Gabriel, V. Strassen

Leitung dieser Dissertation: V. Strassen

Augenblickliche Stellung: Assistent am Seminar für Angewandte Mathematik der Universität Zürich

Zürich, Februar 1980

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhalt

Einleitung

Eine klassische Frage ist, in welchen Fällen eine lineare Projektion eines projektiven Raumes einen Isomorphismus auf einer Untervarietät induziert. Zu ihrer Beantwortung untersucht man die Sekantengeraden der Untervarietät. Allgemeiner stehen die höherdimensionalen Sekantenräume der Varietät in engem Zusammenhang mit den mehrfachen Punkten von Projektionen. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit Sekantenräumen an gewisse Kurven in einem projektiven Raum.

Die linearen Unterräume von $\mathbb{P}^n$ der Dimension r, die eine Kurve in $r+1$ linear unabhängigen Punkten schneiden, bilden eine konstruktible Teilmenge der entsprechenden Grassmann-Varietät. Ihr Abschluss ist die Sekantenvarietät. Wir möchten die rationale Aequivalenzklasse dieser Sekantenvarietät im Chow-Ring der Grassmann-Varietät berechnen. Dazu schränken wir die Menge der betrachteten Kurven etwas ein.

Zunächst definieren wir Schmiegräume an eine Kurve, indem wir formale Taylorreihen (in beliebiger Charakteristik) von lokalen Koordinaten des $\mathbb{P}^n$ in einem lokalen Parameter für die Kurve benutzen. Klassisch bestimmt man über $\mathbb{C}$ Schmiegräume mit Hilfe von Ableitungen lokaler Koordinaten. Unsere Definition stimmt nicht immer mit der klassischen überein. Sie hat aber die Eigenschaft, für Hyperebenenschnitte genau die Multiplizität anzugeben. Wir definieren die Klasse der r-krummen Kurven, für die wir die Sekantenvarietät bestimmen werden.

Zunächst untersuchen wir die Eigenschaft "r-krumm" und zeigen, dass die rationale Normkurve in $\mathbb{P}^n$ die einzige n-krumme Kurve ist, und dass eine "generische" Kurve in $\mathbb{P}^n$ r-krumm ist für jedes $r<\frac{n}{2}$. "Glatt" lässt sich auf natürliche Art als "1-krumm" auffassen. Eine Verbindung zwischen der Sekantenvarietät und X^{r+1} wird durch die Sekantenkorrespondenz geliefert. Wir zeigen, dass die letztere für r-krumme Kurven isomorph X^{r+1} ist. Ausserdem ist die Abbildung, die einem $(r+1)$-Tupel von Punkten von X

Einleitung

Eine klassische Frage ist, in welchen Fällen eine lineare Projektion einer projektiven Varietät einen Isomorphismus auf [illegible]

[illegible] in einem projektiven Raum.

[illegible]

den erzeugten linearen Raum zuordnet, separabel vom Grad $(r+1)!$, wie zu erwarten.
Mit Hilfe einer exakten Sequenz von Vektorbündeln auf der Sekantenkorrespondenz des $\mathbb{P}^n$ rechnen wir die Zurücknahme der Chernklassen des tautologischen Bündels der Grassmann-Varietät auf X^{r+1} aus. Dies liefert zunächst einen kurzen Beweis der klassischen Plücker-Formeln für die Schmiegraum-Abbildungen, und vor allem ein Verfahren, die rationale Aequivalenzklasse der Sekantenvarietät zu berechnen. Wir behandeln einige Spezialfälle der resultierenden kombinatorischen Aufgabe. Insbesondere berechnen wir die Anzahl derjenigen Sekantenräume, die einen festen linearen Unterraum (geeigneter Dimension) von $\mathbb{P}^n$ treffen. Schliesslich erhalten wir einen einfachen Beweis der Cayley-Formeln für Multisekanten von Kurven im $\mathbb{P}^3$.

Volker Strassen hat mir die Beschäftigung mit dem Sekantenproblem vorgeschlagen und in langen Gesprächen zahlreiche Ideen und Anregungen beigesteuert. Besonderer Dank gilt meiner Frau Dorothea für ihre ständige liebevolle Unterstützung, ausserdem für die Reinschrift dieser Arbeit.

dem erzeugten linearen Raum aufspannt, vergrößert vom Grad (k+1)), war zu erwarten.
Mit Hilfe einer exakten Sequenz von Vektorbündeln auf der Sekan-tenvarietät über P^n berechnen wir die Invarianten der Garben-klassen [illegible] der Gitterpunkt-Varietät auf $P^{(k)}$ aus. Insbesondere ergibt sich ein kurzer Beweis der klassischen [illegible]-Formeln für die Schnittpunkt-[illegible], und wir zeigen [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], die einen festen linearen [illegible] [illegible] [illegible] von P^n treffen, schließlich [illegible] [illegible] [illegible] die Cayley-Formeln für Vollständigkeit von Kurven im P^3.

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] mit der [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] Dank gilt meiner Frau [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] für die [illegible] dieses [illegible].

1. Schmiegräume und r-krumme Kurven

Wir setzen im Folgenden einen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k voraus. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über k, $P = P(V)$ der zugehörige projektive Raum. Wir bezeichnen mit $P(W)$ die Projektivierung eines Unterraumes $W \subseteq V$ und mit $G(r,P)$ die Grassmann-Varietät der r-dimensionalen linearen Unterräume von P. Für $x_o,\ldots,x_r \in P$, $L_o,\ldots,L_s \subseteq P$ bezeichnen wir mit $\ell(x_o,\ldots,x_r,L_o,\ldots,L_s)$ den in P erzeugten linearen Unterraum.
Sei $X \subseteq P$ eine Kurve. Im Folgenden werden wir stets vorraussetzen, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt ist, dass X nichtausgeartet (d.h. in keiner Hyperebene von P enthalten), glatt, projektiv, irreduzibel und reduziert ist. Für $x \in X$ ist dann der projektive Tangentialraum $\Pi_{x,X} \in G(1,P)$ definiert.
Eine Basiswahl für V liefert einen Vektorraum-Isomorphismus $T\colon V \longrightarrow \mathbb{A}^{n+1}$ und homogene Koordinaten $T_o,\ldots,T_n$ auf P.

1.1.Satz-Definition. Seien $X \subseteq P$ Kurve, $x \in X$, $o \leq p \leq n$ mit $T_p(x) \neq 0$, $t \in \mathcal{O}_{x,X}$ lokaler Parameter, $\sum_{o \leq k} f_{ik} t^k$ die Taylorreihe von $f_i = (T_i/T_p \restriction X) \in \mathcal{O}_{x,X}$, und $W \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ der von den $r+1$ Vektoren $(f_{oo},\ldots,f_{no}),\ldots,(f_{or},\ldots,f_{nr})$ erzeugte lineare Unterraum.
Dann heisst $\Pi^r_{x,X} = P(T^{-1}(W)) \subseteq P$ r-ter Schmiegraum von X bei x.
$\Pi^r_{x,X}$ ist ein linearer Unterraum von P mit Dimension $\leq r$ und ist unabhängig von den Wahlen von T,p und t. Es ist $\Pi^o_{x,X} = \{x\}$ und $\Pi^1_{x,X} = \Pi_{x,X}$.

Beweis. Sei zunächst $T': V \longrightarrow \mathbb{A}^{n+1}$ eine andere Basiswahl mit homogenen Koordinaten $T'_o,\dots,T'_n$, $T'_q(x) \neq 0$, $W' \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ der entsprechende Unterraum, und $g = (g_{ij}) = T' \circ T^{-1} \in GL_{n+1}$. Dann ist $\sum_{o \leq \ell \leq n} g_{q\ell} T_\ell / T_p = T'_q/T_p \in \mathcal{O}_{x,P}$ Einheit, und mit $a = T_p/T'_q$ ist

$$T'_i/T'_q = \sum_{o \leq j \leq n} g_{ij} T_j \Big/ \sum_{o \leq \ell \leq n} g_{q\ell} T_\ell = a \cdot \sum_{o \leq j \leq n} g_{ij} T_j / T_p .$$

Für die Taylorreihen $\sum_{o \leq h} f'_{ih} t^h$ von $f'_i = T'_i/T'_q \restriction X$ und $\sum_{o \leq m} a_m t^m$ von $a \restriction X$ gilt

$$\sum_{o \leq n} f'_{ih} t^h = \sum_{o \leq m} a_m t^m \sum_{\substack{o \leq j \leq n \\ o \leq k}} g_{ij} f_{jk} t^k .$$

Der Koeffizient b_{jh} von t^h in

$$\sum_{o \leq k,m} a_m t^m \cdot f_{jk} t^k$$

ist eine Linearkombination von $f_{jo},\dots,f_{jh}$ mit Koeffizienten, die nicht von j abhängen. Also ist $(b_{oh},\dots,b_{nh}) \in W$, und $(f'_{oh},\dots,f'_{nh}) = g \cdot (b_{oh},\dots,b_{nh}) \in g(W)$, also ist $T'^{-1}(W') = T^{-1}(W)$. $\Pi^r_{x,X}$ ist folglich nicht von der Wahl von T abhängig. Sei jetzt $t' \in \mathcal{O}_{x,X}$ anderer lokaler Parameter, $\sum_{o \leq \ell} f'_{i\ell} t'^\ell$ Taylorreihe von f_i in t'. $h = t'/t \in \mathcal{O}_{x,X}$ ist Einheit, mit Taylorreihe $\sum_{o \leq j} h_j t^j$. Es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}_{x,X} & \\ \swarrow & & \searrow \\ k[[t']] & \xrightarrow{\ \cong\ } & k[[t]] \\ t' & \longmapsto & \sum_{o \leq j} h_j t^{j+1} \end{array}$$

Für $o \leq i \leq n$ ist

$$\sum_{o \leq k} f_{ik} t^k = \sum_{o \leq \ell} f'_{i\ell} (\sum h_j t^{j+1})^\ell$$

$$= \sum_{\substack{o \leq \ell \\ o \leq j_1, \ldots, j_\ell}} f'_{i\ell} h_{j_1} \ldots h_{j_\ell} \binom{j_1 + \ldots + j_\ell}{j_1 \ \ldots \ j_\ell} t^{\ell + j_1 + \ldots + j_\ell}$$

Also ist

$(f_{ok}, \ldots, f_{nk}) = h_o^k \ (f'_{ok}, \ldots, f'_{nk})$ + Linearkombination

von $(f'_{oo}, \ldots, f'_{no}), \ldots, (f'_{o,k-1}, \ldots, f'_{n,k-1})$,

und folglich erzeugen $(f_{oo}, \ldots, f_{no}), \ldots, (f_{or}, \ldots, f_{nr})$ den gleichen Unterraum W von $\mathbb{A}^{n+1}$ wie $(f'_{oo}, \ldots, f'_{no}), \ldots, (f'_{or}, \ldots, f'_{nr})$.

Offensichtlich ist $\Pi^o_{x,X} = \{x\}$ und $\Pi^1_{x,X}$ der Tangentialraum bei x. Damit sind die Behauptungen bewiesen.

1.2.Satz. Sei $X \subsetneq P$ eine nichtausgeartete Kurve, $x \in X$ glatt, $H \subsetneq P$ eine Hyperebene mit $x \in H$. Dann gilt für die Durchschnittmultiplizität

$$i(X.H,x) = \min\{r: \Pi^r_{x,X} \nsubseteq H\}.$$

Beweis. Wähle homogene Koordinaten $T'_o, \ldots, T'_n$ auf P, so dass $x = (1:0:\ldots:0)$ ist. Sei weiter $t \in \mathcal{O}_{x,X}$ ein lokaler Parameter, $T_i = T'_i/T'_o$ für $o \leq i \leq n$, $f_i = T_i \restriction X$ mit Taylorreihe $\sum_{o \leq j} f_{ij} t^j$,

$U = \{T'_o \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$ mit $\mathcal{O}_P(U) = k[T_1, \ldots, T_n]$,

$H \cap U = \{\sum_{1 \leq \ell \leq n} h_\ell T_\ell = 0\}, \alpha \in \mathcal{O}_{x,P} = k[T_1, \ldots, T_n]_{(T_1, \ldots, T_n)}$ das

Ideal von X und $A = \mathcal{O}_{x,P}/(\mathfrak{a},\sum h_\ell T_\ell) = \mathcal{O}_{x,X}/(\sum h_\ell f_\ell)$. A ist ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum, und $i(X.H,x) = \dim A$. Wenn $d = \dim \Pi^r_{x,X}$ ist, so können wir o.B.d.A. annehmen, dass

$$\begin{bmatrix} f_{oo} & \cdots & f_{or} \\ \vdots & & \vdots \\ \\ \\ f_{no} & \cdots & f_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ & 1 & * & \cdots & & * \\ & & & 1 & * \cdots & * \\ & & & & & \\ & 0 & & & 1 & * \cdots * \\ & & & & & \\ \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ \\ d \\ \vdots \\ n \end{matrix} .$$

Dann ist $\Pi^r_{x,X}$ von den Einheitspunkten $e_o,\ldots,e_d$ aufgespannt.

Wir betrachten das kommutative Diagramm von Ringmorphismen über k

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}_P(U) & \hookrightarrow & \mathcal{O}_{x,P} & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_{x,X} & \twoheadrightarrow & A \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \beta \\ & & k[[T_1,\ldots,T_n]] & \xrightarrow{\alpha} & k[[t]] & \twoheadrightarrow & k[[t]]/(\sum_{\ell,j} h_\ell f_{\ell j} t^j) \\ & & & & & & \cong k[[t]]/(t^m) \end{array}$$

wo $\alpha(T_i) = \sum_{o\leq j} f_{ij}t^j$ und $m = \min\{j: \sum_{1\leq \ell\leq n} h_\ell f_{\ell j} \neq 0\}$ ist.

α ist surjektiv, denn es gibt ein i, so dass $f_i \in \mathcal{O}_{x,X}$ lokaler Parameter ist. Das Bild von β enthält das Bild von $k[t]$, und folglich ist β ein Isomorphismus, und

$$i(X.H,x) = \dim A = m.$$

Also gilt

$$i(X.H,x) \geq r+1 \iff \text{für } j = o,\ldots,r \text{ ist } \sum_{1\leq \ell\leq n} h_\ell f_{\ell j} = 0$$

$$\iff h_1 = \cdots = h_d = 0 \iff e_o,\ldots,e_d \in H \iff \Pi^r_{x,X} \subseteq H.$$

Aus diesem Satz folgt insbesondere, dass $\Pi^{d+1}_{x,X} = P$ ist, wo $d = \deg X$ ist. Ausserdem zeigt er, dass man den Schmiegraum $\Pi^{r}_{x,X}$ auch definieren kann als Durchschnitt der Hyperebenen H mit $i(H.X,x) \geq r+1$. Diese Definition ist sinnvoll auch für einen singulären Punkt $x \in X$.

Wenn $\dim \Pi^{r}_{x,X} = r$ für alle $x \in X$ bis auf endlich viele gilt, so erhält man eine rationale Abbildung, also einen Morphismus, $\delta_r : X \longrightarrow G(r,P)$. Die Voraussetzung ist in Charakteristik 0 stets erfüllt, und δ_r kann dann auch mit Ableitungen von lokalen Koordinaten dargestellt werden [7, chapter 2]. In der folgenden Definition beschreiben wir eine noch stärkere Bedingung an eingebettete Kurven.

1.3.Definition. Sei $X\subseteq P$ eine Kurve,
$R = (a_o+1)x_o+\ldots+(a_s+1)x_s \in Div_{r+1}$ ein Divisor vom Grad $r+1$,
wo $x_o,\ldots,x_s$ paarweise verschieden und $a_o,\ldots,a_s \geq 0$ sind.
X heisst krumm bei R (bezüglich der Einbettung in P), wenn
$\Pi^{a_o}_{x_o,X},\ldots,\Pi^{a_s}_{x_s,X}$ einen linearen Raum der (maximalen) Dimension
r erzeugen. Wenn X krumm bei jedem $R\in Div_{r+1}$ ist, so heisst
X r-krumm.

Anschaulich bedeutet r-krumm, dass je $r+1$ Punkte der eingebetteten Kurve linear unabhängig sind, inklusive unendlich nahe. Insbesondere sind auf einer r-krummen Kurve je $r+1$ paarweise verschiedene Punkte linear unabhängig, und alle Schmiegräume $\Pi^a_{x,X}$ mit $a<r$ haben Dimension a. Für $s<r$ ist eine r-krumme Kurve auch s-krumm. 1-krumm bedeutet lediglich glatt, aber für $r\geqq 2$ ist "r-krumm" natürlich von der Einbettung abhängig. Wir untersuchen zunächst den speziellen Fall der rationalen Normkurve, die sich als Kurve mit maximaler Krummheit erweist (1.4. und 3.5). Dann zeigen wir, dass eine "allgemeine" Kurve in $\mathbb{P}^n$ im wesentlichen $\frac{n}{2}$-krumm ist.

1.4.Beispiel. Die rationale Normkurve im $\mathbb{P}^n$ ist n-krumm.

$$\phi: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^n$$
$$(x_o:x_1) \longmapsto (x_o^n:x_o^{n-1}x_1:\ldots:x_1^n)$$

hat als Bild die rationale Normkurve X. Dies ist (bis auf Automorphismen des $\mathbb{P}^n$) die einzige nichtausgeartete glatte Kurve in $\mathbb{P}^n$ mit Grad n [8, IV Ex. 3.4.].

Seien $o \leq s \leq r$, $z_o,\dots,z_s \in X$ paarweise verschieden, $a_o,\dots,a_s \geq 0$ mit $a_o+\dots+a_s+s = n$, $T_o,\dots,T_n$ die homogenen Koordinaten auf $\mathbb{P}^n$ und $U = \{T_o \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$. O.B.d.A. ist $z_m \in U$ für alle $m \leq s$, denn zu jedem Automorphismus α von $\mathbb{P}^1$ gibt es einen Automorphismus β von $\mathbb{P}^n$ mit $\phi \circ \alpha = \beta \circ \phi$. Für $o \leq i \leq n$ sei $f_i = (T_i/T_o) \upharpoonright X$. Dann ist für $z \in X \cap U$

$$t = f_1 - f_1(z) \in \mathcal{O}_X(X \cap U) \subseteq \mathcal{O}_{z,X}$$

lokaler Parameter bei z. Für $o \leq i \leq n$ ist

$$f_i = f_1^i = (f_1(z)+t)^i = \sum_{o \leq j \leq i} \binom{i}{j} f_1(z)^{i-j} t^j$$

eine endliche Taylorreihe, und der Schmiegraum $\Pi^a_{z,X}$ wird von

$$(1:\ f_1(z):\ f_1^2(z):\dots:\ f_1^n(z)),\dots,(0:\dots:\ 0:1:\ \binom{a+1}{a} f_1(z):$$
$$\dots:\binom{n}{a} f_1^{n-a}(z))$$

aufgespannt. Sei $z_m = \phi(1:y_m)$ für $o \leq m \leq s$. Für die Behauptung genügt es zu zeigen, dass die $(n+1)\times(n+1)$-Matrix mit Einträgen

$$\binom{i}{j}\ y_m^{i-j} \quad (o \leq i \leq n;\ o \leq m \leq s,\ o \leq j \leq a_m)$$

regulär ist. Sei etwa die Linearkombination der Zeilen mit Koeffizienten $u_o,\dots,u_n \in k$ gleich O, d.h.

$$\forall\, m \leq s,\ \forall\, j \leq a_m \quad \sum_{o \leq i \leq n} u_i \binom{i}{j}\ y_m^{i-j} = 0.$$

$p = \sum u_i T^i \in k[T]$ ist Polynom vom Grad $\leq n$. Wir zeigen, dass p eine (a_m+1)-fache Nullstelle bei y_m hat für $o \leq m \leq s$. Dann ist p = O. Wir definieren eine k-lineare Abbildung

$$D_\ell :\ k[T] \longrightarrow k[T]$$

durch $D_\ell(T^i) = \binom{i}{\ell} T^{i-\ell}$ (d.h. $\ell!\, D_\ell(f)$ ist die ℓ-te Ableitung von f).

Für $y\epsilon k$ ist

$$T^i = (y+T-y)^i = \sum_{0\leq \ell \leq i} \binom{i}{\ell} y^{i-\ell}(T-y)^\ell = \sum_{0\leq \ell} D_\ell(T^i)(y)\cdot(T-y)^\ell,$$

und wegen der Linearität ist für alle $f\epsilon k[T]$

$$f = \sum_{0\leq \ell} D_\ell(f)(y)\cdot(T-y)^\ell$$

die Taylorentwicklung bei y. Also gilt

$$(T-y)^{\ell+1} | f \iff D_0(f)(y)=\cdots= D_\ell(f)(y) = 0.$$

Für $0\leq m\leq s$ und $0\leq j\leq a_m$ gilt

$$D_j(p)(y_m) = \sum_{0\leq i\leq n} u_i \binom{i}{j} y_m^{i-j} = 0,$$

also

$$(T-y_m)^{a_m+1} \mid p .$$

Damit ist die Behauptung 1.4. bewiesen. In Korollar 3.5. werden wir zeigen, dass die rationale Normkurve in $\mathbb{P}^n$ die einzige n-krumme Kurve ist.

Wir wollen in Folgenden zeigen, dass eine "generische" Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ r-krumm ist, falls $r<n/2$ ist.

Zu einer Einbettung gehört ein lineares System, nämlich das System der Hyperebenenschnitte. Solche linearen Systeme heissen "very ample", und die Beziehung zu den Einbettungen ist bijektiv. Im nächsten Lemma beweisen wir zunächst, dass es genügt, Einbettungen zu betrachten, die durch vollständige lineare Systeme gegeben sind. Für diesen Fall geben wir eine Charakterisierung von "r-krumm".

Mit Div_{r+1} bezeichnen wir die Menge der effektiven Divisoren auf einer Kurve vom Grad $r+1$. Div_{r+1} ist in natürlicher Weise eine Varietät der Dimension $r+1$, isomorph dem $(r+1)$-fachen symmetrischen Produkt der Kurve.

1.5.Lemma Seien $0 \leq m, r \leq n \leq d$, und $D \in \mathrm{Div}_d$ liefere eine Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. Dann gelten

(i) Sei $2r<m$.

Es gibt eine echte abgeschlossene Untervarietät $Z \subseteq G(m,|D|)$, so dass für alle linearen Systeme $S \in G(m,|D|)$, die eine Einbettung $\psi: X \hookrightarrow \mathbb{P}^m$ liefern, gilt

ψ ist r-krumm $\Longleftrightarrow$ $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ ist r-krumm und $S \notin Z$.

(ii) $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ ist r-krumm

$\Longleftrightarrow \forall\ R \in \mathrm{Div}_{r+1}\quad \ell(D-R) = \ell(D)-r-1$.

Beweis. Wir betrachten den Morphismus

$$\phi: \mathrm{Div}_{d-r-1} \times \mathrm{Div}_{r+1} \longrightarrow \mathrm{Div}_d$$

$$(E, R) \longmapsto E + R$$

und für $R \in \mathrm{Div}_{r+1}$

$$Y(R) = \phi(\mathrm{Div}_{d-r-1} \times \{R\}) \cap |D| = \{F \in |D| : F-R \geq 0\}.$$

$F \longmapsto F-R$ liefert einen Isomorphismus zwischen $Y(R)$ und dem vollständigen linearen System $|D-R|$.

Sei jetzt $S\subseteq|D|$ ein lineares System, das eine Einbettung $\psi: X \hookrightarrow \mathbb{P}^m$ liefert. Sei weiter $R = (a_o+1)x_o+\cdots+(a_s+1)x_s \in \mathrm{Div}_{r+1}$ mit $a_o,\ldots,a_s\geq 0$ und paarweise verschiedenen $x_o,\ldots,x_s$, und

$$L = \ell(\Pi_{x_o}^{a_o},X,\ldots,\Pi_{x_s}^{a_s},X).$$

Es ist

$$\dim (S\cap Y(R)) \geq m + \dim|D-R|-\dim|D|$$
$$= m-r-1 + \ell(K-D+R) - \ell(K-D)\geq m-r-1.$$

Ausserdem ist

$$\{H\in G(m-1,\mathbb{P}^m): L\subseteq H\} = \{H\in G(m-1,\mathbb{P}^m): X.H-R\geq 0\}$$
$$\simeq \{E\in S: E-R\geq 0\} = S\cap Y(R) .$$

Also gilt

ψ ist krumm bei $R \iff \dim L\geq r$
$\iff \dim \{H\in G(m-1,\mathbb{P}^m): L\subseteq H\}\leq m-r-1$
$\iff \dim S\cap Y(R) \leq m-r-1 \iff$ S und $Y(R)$ schneiden eigentlich in $|D|$, und $\ell(K-D+R) = \ell(K-D)$.

Da

$$\ell(K-D+R) - \ell(K-D) = \ell(D-R) - \ell(D) + r+1\geq 0$$

und die erste Bedingung für $S=|D|$ stets erfüllt ist, folgt hieraus die Behauptung (ii), ausserdem

ψ ist r-krumm $\iff X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ ist r-krumm und
$S\cap Y(R)$ ist eigentlich für alle $R\in\mathrm{Div}_{r+1}$.

Für (i) betrachten wir

$$Z_o = \{(M,N)\in G(m,|D|)\times G(n-r-1,|D|): \dim M\cap N\geq m-r\}$$

mit Projektionen π_1 und π_2. M und N schneiden eigentlich in $|D|$, genau wenn $(M,N)\notin Z_o$. Wenn $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ r-krumm ist, so ist für alle $R\in\mathrm{Div}_{r+1}$

$$\dim Y(R) = \dim |D-R| = n-r-1,$$

$$\dim \pi_2^{-1}(Y(R)) = \dim G(m,|D|) - (m-r+1).$$

Also genügt für die Behauptung (i)

$$Z = \pi_1(\pi_2^{-1}(\{Y(R) \colon R \in \mathrm{Div}_{r+1}\})),$$

denn jede Komponente von Z hat Dimension

$$\leq r+1 + \dim G(m,|D|) - (m-r+1) < \dim G(m,|D|).$$

Sei

$$G_d^n = \{D \in \mathrm{Div}_d \colon \dim |D| \geq n\},$$

$$\tau(n,d) = (n+1)(d-n) - ng.$$

Die G_d^n sind abgeschlossene Untervarietäten von Div_d, und liefern für $d \geq g$ eine Stratifizierung

$$\mathrm{Div}_d = G_d^{d-g} \supseteq G_d^{d-g+1} \supseteq \cdots \supseteq G_d^d \supseteq G_d^{d+1} = \emptyset.$$

Für alle $D \in \mathrm{Div}_d$ ist $\dim |D| = h^1(D) + d-g \geq d-g$, also $G_d^{d-g} = \mathrm{Div}_d$. G_d^{d-g+1} besteht genau aus den spezialen Divisoren (mit $h^1(D) = \ell(K-D) > 0$). Wenn die Brill-Noether-Zahl $\tau(n,d) \geq 0$ und $d-g \leq n \leq d$ ist, so ist $G_d^n \neq \emptyset$ und jede Komponente hat Dimension $\geq \tau(n,d)+n$ [10, Theorem 5].

Wir sagen, dass G_d^n die Brill-Noether-Dimension hat, wenn die Dimension jeder Komponente von G_d^n gleich $\tau(n,d)+n$ ist, falls $\tau(n,d) \geq 0$, und wenn $G_d^n = \emptyset$ ist, falls $\tau(n,d) < 0$. Das Brill-Noether-Problem besteht darin, zu bestimmen, welche G_d^n die Brill-Noether-Dimension haben. Kürzlich haben Griffiths und Harris dieses Problem gelöst (für eine generische Kurve über $\mathbb{C}$).

1.6.Definition. $D \in Div_d$ heisst krumm bei $R \in Div_{r+1}$, wenn

$$\ell(D-R) = \ell(D)-r-1$$

ist. D heisst r-krumm, wenn D krumm ist bei allen $R \in Div_{r+1}$. $K_d^r \subseteq Div_d$ ist die Menge aller r-krummen Divisoren vom Grad d.

Anschaulich bedeutet $D \in K_d^r$, dass je $r+1$ Punkte dem linearen System $|D|$ genau $r+1$ linear unabhängige Bedingungen auferlegen. Für $s \leq r$ ist $K_d^s \subseteq K_d^r$, $K_d^{-1} = Div_d$, K_d^o besteht aus genau den Divisoren, die einen Morphismus in einen $\mathbb{P}^n$ liefern, und K_d^1 besteht aus genau den Divisoren, die eine Einbettung in einen $\mathbb{P}^n$ liefern [8, IV.3.1]. Diese Einbettung ist r-krumm, genau wenn der Divisor r-krumm ist (1.5 (ii)). Im folgenden Satz geben wir einige Fälle an, in denen $K_d^r \cap G_d^n$ dicht in G_d^n liegt.

1.7.Satz. Sei X eine Kurve mit Geschlecht g, und $o \leq r,n,d$. Dann gelten

(i) Falls $r \leq d-2g$ ist, so ist $K_d^r = Div_d$.

(ii) Sei $g \geq 2$. Der kanonische Divisor ist r-krumm, genau wenn $G_{r+1}^1 = \emptyset$ ist.

(iii) Sei $r(n+g-d+2) < n$, und G_{d-r-1}^{n-r} habe die Brill-Noether-Dimension. Dann ist $K_d^r \cap (G_d^n \setminus G_d^{n+1})$ offen und dicht in $G_d^n \setminus G_d^{n+1}$.

(iv) Sei $2r < d-g$. Dann ist K_d^r offen in $Div_d \setminus G_d^{d-g+1}$ und dicht in Div_d.

Beweis. (i) Sei $D \in Div_d$. Es gilt

$$r \leq d-2g \Longrightarrow d,\ d-r-1 > 2g-2$$

$$\Longrightarrow \forall R \in Div_{r+1} \quad D \text{ und } D-R \text{ sind nicht-spezial } [8, IV.1.3.4.]$$

$$\Longrightarrow \forall R \in Div_{r+1} \quad \ell(D-R) = \ell(D)-r-1.$$

Also ist $Div_d = K_d^r$. (Siehe [8,IV.3.2] für den Fall $r=1$.)

(ii) Sei $K \in Div_{2g-2}$ ein kanonischer Divisor. Es ist $\ell(K) = g$ und: K ist r-krumm

$$\Longleftrightarrow \forall R \in Div_{r+1} \quad \ell(K-R) = g-r-1$$

$$\Longleftrightarrow \forall R \in Div_{r+1} \quad \dim |R| = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad G_{r+1}^1 = \emptyset$$

(siehe [8, IV.5.5.3] für den Fall $g=5$, $r=2$.) Wir bemerken noch, dass $\tau(1,r+1) = 2r-g$, also $G_{r+1}^1 \neq \emptyset$ ist für $2r \geq g$. Für $r=1$ erhalten wir das bekannte Kriterium für nicht-hyperelliptische Kurven: der kanonische Morphismus ist eine Einbettung (d.h. ist 1-krumm), genau wenn $G_2^1 = \emptyset$.

Für (iii) bemerken wir zunächst, dass für $D \in G_d^n \setminus G_d^{n+1}$

$$n+g-d+2 = \ell(D)+g-d+1 = h^1(D)+2 \geq 2$$

ist, ausserdem $r \neq 0 \Longrightarrow d \geq g-1$. Wir bezeichnen mit Pic_d die Menge der Isomorphieklassen von invertierbaren Garben vom Grad d. Pic_d ist in natürlicher Weise eine glatte projektive Varietät der Dimension g, isomorph der Jacobi-Varietät.

$$f_d: Div_d \longrightarrow Pic_d$$

ist der kanonische Morphismus. Die Fasern von f_d sind genau die vollen linearen Systeme. Wir betrachten das folgende kommu-

tative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
G_d^n & \hookrightarrow & \mathrm{Div}_d & \xleftarrow{\ \phi\ } & G_{d-r-1}^{n-r} \times \mathrm{Div}_{r+1} \\
 & {\scriptstyle f_d}\searrow & \downarrow{\scriptstyle f_d} & & \downarrow{\scriptstyle f_{d-r-1} \times \mathrm{id}} \\
 & & \mathrm{Pic}_d & \xleftarrow[\ \phi'\ ]{} & \mathrm{Pic}_{d-r-1} \times \mathrm{Div}_{r+1}
\end{array}$$

wo die Morphismen ϕ, ϕ' durch

$$\phi(E,R) = E + R \ , \quad \phi'(|E|,R) = |E + R|$$

gegeben sind. Es ist

$$\tau(n-r,d-r-1) = \tau(n,d) + r(n+g-d+2)-n-r-1 < \tau(n,d)-r-1 \ .$$

Wir können annehmen, dass $G_d^n \neq G_d^{n+1}$ ist. Sei

$$U = (G_d^n \setminus G_d^{n+1}) \setminus (f_d^{-1}(f_d \circ \phi)(G_{d-r-1}^{n-r} \times \mathrm{Div}_{r+1})).$$

U ist offen in $G_d^n \setminus G_d^{n+1}$. Falls $\tau(n,d)<0$ ist, so ist $\tau(n-r,d-r-1)<0$, also $G_{d-r-1}^{n-r} = \emptyset$ und $U = G_d^n \setminus G_d^{n+1}$. Falls $\tau(n,d) \geq 0$ ist, so ist $\dim G_d^n \geq \tau(n,d)+n$ nach [10, Theorem 5]. Die Fasern von

$$(f_{d-r-1} \times \mathrm{id}) \restriction G_{d-r-1}^{n-r} \times \mathrm{Div}_{r+1}$$

haben Dimension $\geq n-r$, und die Fasern von

$$f_d \restriction G_d^n \setminus G_d^{n+1}$$

haben Dimension n. Also ist

$$\dim (G_d^n \setminus G_d^{n+1}) \cap f_d^{-1}(\phi'((f_{d-r-1} \times \mathrm{id})(G_{d-r-1}^{n-r} \times \mathrm{Div}_{r+1})))$$

$$\leq (\tau(n-r,d-r-1)+n-r+r+1)-(n-r)+n$$

$$= \tau(n,d)+r(n+g-d+2) < \dim G_d^n$$

und folglich ist U offen und dicht in $G_d^n \setminus G_d^{n+1}$. Für (iii) genügt es,

$$U = K_d^r \cap (G_d^n \setminus G_d^{n+1})$$

zu zeigen. Sei $D \in G_d^n \setminus G_d^{n+1}$. Dann gilt

$$D \notin K_d^r \iff \exists\, R \in \mathrm{Div}_{r+1} \quad \dim |D-R| \geq n-r$$

$$\iff \exists\, (E,R) \in G_{d-r-1}^{n-r} \times \mathrm{Div}_{r+1} \quad D \in |E+R|$$

$$\iff \exists\, (E,R) \in G_{d-r-1}^{n-r} \times \mathrm{Div}_{r+1} \quad f_d(D) = f_d \circ \phi(E,R)$$

$$\iff D \notin U.$$

Wir wollen (iv) aus dem Spezialfall $n=d-g$ von (iii) herleiten. Hierzu können wir $g \geq 3$ annehmen, denn aus den Voraussetzungen und $g \leq 2$ folgt ($r=0$ oder $r \leq d-g-2 < d-2g$), und wir können (i) anwenden.

Es genügt zu zeigen, dass $\dim G_m^{m-g+1} \leq g-1$ für alle m ist. Daraus folgt nämlich, dass $G_{d-r-1}^{d-g-r} = G_{d-r-1}^{(d-r-1)-g+1}$ die Brill-Noether-Dimension hat, und dass $\mathrm{Div}_d = G_d^{d-g} \neq G_d^{d-g+1}$ ist für $d \geq g$. O.B.d.A. ist $m \leq 2g-2$, denn sonst ist $G_m^{m-g+1} = \emptyset$ [8, IV.1.3.4]. Wir betrachten

$$T = \{(E,F) \in |K| \times \mathrm{Div}_{2g-2-m} : E-F \geq 0\},$$

$$\psi : T \longrightarrow \mathrm{Div}_m$$

$$(E,F) \longmapsto E-F$$

Dann ist $G_m^{m-g+1} = \psi(T)$, denn für $D \in \mathrm{Div}_m$ gilt

$$D \in G_m^{m-g+1} \iff \ell(K-D) > 0$$

$$\iff \exists\, F \in \mathrm{Div}_{2g-2-m} \quad F \in |K-D|$$

$$\iff \exists\, (E,F) \in T \quad D = E-F = \psi((E,F)).$$

Die Projektion $\pi_1: T \longrightarrow |K|$ hat endliche Fasern, also ist

$$\dim G_m^{m-g+1} \leq \dim T \leq \dim |K| = g-1.$$

1.8. Bemerkung. Die Menge K_d^1 der Divisoren D in Div_d, die eine Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ liefern ("very ample"), hat eine Stratifizierung in die Mengen $K_d^1 \cap (G_d^n \setminus G_d^{n+1})$ für verschiedene n, innerhalb deren $n = \dim|D|$ konstant ist. Eine mögliche Präzisierung der Aussage "eine generische Kurve in $\mathbb{P}^n$ ist r-krumm für $r<n/2$" wäre Folgendes:

(1): Für eine generische Kurve und alle $r,n,d \geq 0$ mit $2r<n$ ist $K_d^r \cap G_d^n$ dicht in $K_d^1 \cap G_d^n$.

(2): Für eine generische Kurve, einen generischen Divisor $D \in \mathrm{Div}_d$ und alle $r,n,d \geq 0$ mit $2r<n$ gibt es eine offene dichte Menge $U \subseteq G(n,|D|)$, so dass für alle linearen Systeme $S \in U$, die eine Einbettung der Kurve in $\mathbb{P}^n$ liefern, diese Einbettung r-krumm ist.

Aus Punkt (iv) des Satzes folgt (1) für $d \geq g$ und den generischen Fall $n = d-g$, und aus (iii) eine schwächere Eigenschaft im allgemeinen Fall (unter der Voraussetzung, dass G_{d-r-1}^{n-r} die Brill-Noether-Dimension hat). Dann folgt (2) aus Lemma 1.5.(i).

Allgemein kann man fragen: Wann gibt es eine r-krumme Einbettung vom Grad d in $\mathbb{P}^n$? Hierbei sucht man natürlich, r

zu maximieren und d,n zu minimieren. Aus 1.7 (i) + 1.5 (i) folgt zum Beispiel: jede Kurve hat eine r-krumme Einbettung vom Grad d in $\mathbb{P}^n$, wenn $d \geq r+2g$ und $n > 2r$ ist. Dies verallgemeinert die Tatsache, dass sich jede Kurve in $\mathbb{P}^3$ einbetten lässt $(r=1)$.

Aus 1.7 (iv) folgt insbesondere, dass $K_d^r \cap \{$nicht-speziale Divisoren$\} \neq \emptyset$ ist für $d \geq g+2r+1$. Dies liefert für $r=1$ eine Aussage eines Satzes von Halphen [8, IV.6.1].

2. Sekantenvarietät und Sekantenkorrespondenz

Sei $X \subseteq P$ eine Kurve (wie immer, glatt, irreduzibel, reduziert, nichtausgeartet), und $o \leq r < n$.

2.1. Definition. Die Sekantenkorrespondenz $Sc(r,X)$ ist der Abschluss in $X^{r+1} \times G(r,P)$ von

$$\{(x_o,\dots,x_r,L) \in X^{r+1} \times G(r,P) : L = \ell(x_o,\dots,x_r)\}.$$

Die Projektionen induzieren Morphismen

$$\begin{array}{ccc} Sc(r,X) & \longrightarrow & G(r,P) \\ \chi \downarrow & & \\ X^{r+1} & & \end{array}$$

Das Bild von $Sc(r,X)$ in $G(r,P)$ heisst Sekantenvarietät $Sec(r,X)$:

$$Sc(r,X) \xrightarrow{\gamma} Sec(r,X) \hookrightarrow G(r,P).$$

Die linear unabhängigen Tupel in X^{r+1} bilden eine nichtleere offene Menge U, und $\chi \restriction \chi^{-1}U$ ist ein Isomorphismus, also χ birational. $\gamma \restriction \chi^{-1}U$ hat endliche Fasern. Also sind $Sc(r,X)$ und $Sec(r,X)$ irreduzible projektive Varietäten der Dimension $r+1$. Im allgemeinen sind $Sc(r,X)$ und $Sec(r,X)$ singulär. Aber für r-krumme Kurven hat die Sekantenkorrespondenz eine besonders einfache Gestalt. Bei dieser Tatsache und im Weiteren spielt folgende Abbildung eine zentrale Rolle, die $(x_o,\dots,x_r) \in X^{r+1}$ den Sekantenraum durch $x_o,\dots,x_r$ zuordnet.

2.2.Definition. Sei $X \subseteq P$ eine r-krumme Kurve. Wir definieren eine Abbildung

$$\rho_r: X^{r+1} \longrightarrow G(r,P)$$

dadurch, dass für paarweise verschiedene $x_o,\dots,x_s \in X$ und

$$x = (\underbrace{x_o,\dots,x_o}_{a_o+1},\ \underbrace{x_1,\dots,x_1}_{a_1+1},\dots,\underbrace{x_s,\dots,x_s}_{a_s+1}) \in X^{r+1}$$

$\rho_r(x)$ der von $\Pi^{a_o}_{x_o,X},\dots,\Pi^{a_s}_{x_s,X}$ aufgespannte lineare Raum ist, und dass ρ_r invariant unter der Operation der symmetrischen Gruppe Perm_{r+1} auf X^{r+1} ist.

2.3.Satz. Sei $X \subseteq P$ r-krumm. Dann ist ρ_r ein Morphismus, und

$$\chi: Sc(r,X) \longrightarrow X^{r+1}$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Es genügt zu beweisen, dass ρ_r ein Morphismus ist. Wir zeigen dies mit Induktion nach r.

$r = 0$: ρ_o ist die Einbettung $X \hookrightarrow P$.

Für den Induktionsschritt sei zunächst $(y_o,\dots,y_r) \in X^{r+1} \setminus$ Diagonale (d.h. $\exists i \ y_o \neq y_i$), $I \cup J = \{o,\dots,r\}$ eine nichttriviale Partition mit $y_i \neq y_j$ für $(i,j) \in I \times J$. Seien weiter $\pi_I: X^{r+1} \longrightarrow X^{\# I}$ beziehungsweise $\pi_J: X^{r+1} \longrightarrow X^{\# J}$ die Projektionen auf die zu I beziehungsweise J gehörigen Faktoren.

$$U = \{(x_o,\dots,x_r) \in X^{r+1}: \forall (i,j) \in I \times J \ \ x_i \neq x_j\}$$

ist offen mit $(y_o,\dots,y_r) \in U$. Nach Induktion haben wir Morphismen

$$\rho_I: X^{\# I} \longrightarrow G(\# I-1,P),$$
$$\rho_J: X^{\# J} \longrightarrow G(\# J-1,P).$$

Dass $\rho_r \upharpoonright U$ ein Morphismus ist, folgt aus der folgenden allgemeinen Bemerkung:

Sei Y eine Varietät, $\phi_1: Y \longrightarrow G(s_1,P)$ und $\phi_2: Y \longrightarrow G(s_2,P)$ Morphismen mit

$$\forall y \in Y \quad \phi_1(y) \text{ und } \phi_2(y) \text{ sind linear unabhängig.}$$

Dann gibt es genau einen Morphismus $\phi: Y \longrightarrow G(s_1+s_2+1,P)$ mit

$$\forall y \in Y \quad \phi_1(y), \phi_2(y) \subseteq \phi(y).$$

Sei jetzt $x \in X$. Es genügt zu zeigen, dass ρ_r in einer Umgebung von $(x,\ldots,x)$ ein Morphismus ist. Hierzu konstruieren wir eine Abbildung $\mu: X^{r+1} \longrightarrow \Lambda^{r+1}\mathbb{A}^{n+1}$, so dass mit der Klassenabbildung

$$\kappa: \Lambda^{r+1}\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow P(\Lambda^{r+1}\mathbb{A}^{n+1}) \supseteq G(r,\mathbb{P}^n)$$

fast überall auf X^{r+1} gilt

$$\kappa \circ \mu = \rho_r.$$

Die Behauptung folgt nach Division von μ durch eine Funktion u so dass $\kappa \circ (\mu/u)$ bei $(x,\ldots,x)$ definiert ist.

Sei $t \in \mathcal{O}_{x,X}$ ein lokaler Parameter. Es gibt homogene Koordinaten $T_o,\ldots,T_n$ auf P und eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x, so dass $T_o(x) \neq 0$, $t \in \mathcal{O}_X(U)$ und $f_i = T_i/T_o \upharpoonright X \in \mathcal{O}_X(U)$ sind und Taylorreihen $\sum_{o \le k} f_{ik} t^k$ haben mit

$$\begin{bmatrix} f_{oo} & \cdots & f_{or} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{no} & \cdots & f_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & & \end{bmatrix}.$$

Dann ist $\rho_r(x,..,x) = \Pi^r_{x,X}$ von den ersten $r+1$ Einheitspunkten erzeugt.

$$g_j(t) = \sum_{r+1\leq k} f_{jk}t^k$$

ist die Taylorreihe von f_j-t^j für $o\leq j\leq r$, und von f_j für $r+1\leq j\leq n$. Für $o\leq i\leq r$ sei $t_i = \Pi_i^*(t)\in \mathcal{O}_{X^{r+1}}(U^{r+1})$, wo $\Pi_i: U^{r+1} \longrightarrow U$ die Projektion auf den i-ten Faktor ist. Dann ist $t_o,\ldots,t_r$ ein System von lokalen Parametern bei $(x,\ldots,x)$.

Für den Morphismus

$$\mu: U^{r+1} \longrightarrow \Lambda^{r+1}\mathbb{A}^{n+1}$$

$$(y_o,\ldots y_r) \longmapsto (f_o(y_o),\ldots,f_n(y_o))\wedge\ldots\wedge(f_o(y_r),\ldots,f_n(y_r))$$

und linear unabhängige $y_o,\ldots,y_r\in U$ ist

$$\kappa\circ\mu(y_o,\ldots,y_r) = \rho_r(y_o,\ldots,y_r)\in G(r,\mathbb{P}^n)\subseteq P(\Lambda^{r+1}\mathbb{A}^{n+1}).$$

Die Koordinaten q_a auf $\Lambda^{r+1}\mathbb{A}^{n+1}$ sind die Plückerkoordinaten, indiziert durch die Nationalitäten $a = (a_o,\ldots,a_r)$ mit $o\leq a_o<a_1<\ldots<a_r<n$. Sei a eine solche Nationalität, und etwa $a_s\leq r<a_{s+1}$. Die Funktion

$$q_a\circ\mu\in\mathcal{O}_{X^{r+1}}(U^{r+1})\subseteq\mathcal{O}_{(x,\ldots,x),X^{r+1}}\subseteq k[[t_o,\ldots,t_r]]$$

hat die Taylorreihe

$$h_a = \det\begin{bmatrix} t_o^{a_o}+g_{a_o}(t_o) & \cdots & t_r^{a_o}+g_{a_o}(t_r) \\ \vdots & & \vdots \\ t_o^{a_s}+g_{a_s}(t_o) & \cdots & t_r^{a_s}+g_{a_s}(t_r) \\ & & \\ g_{a_{s+1}}(t_o) & \cdots & g_{a_{s+1}}(t_r) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{a_r}(t_o) & \cdots & g_{a_r}(t_r) \end{bmatrix}\in k[[t_o,\ldots,t_r]] .$$

Für $i \neq j$ ist h_a in $k[[t_o,\dots,t_r]]$ durch $t_i - t_j$ teilbar, also auch durch $\prod_{i<j}(t_i - t_j)$, $q_a \circ \mu$ ist in $\mathcal{O}_{(x,\dots,x),X^{r+1}}$ durch $u = \prod_{i<j}(t_i - t_j)$ teilbar. Jeder Summand von h_a (bezüglich einer Zerlegung der Form $\det(A_{ij}) = \sum_{\sigma\in Perm} sig\sigma\cdot A_{o\sigma o}\cdots)$ ist 0 oder hat Gesamtgrad $\geq a_o+\dots+a_s + (r-s)(r+1) \geq r\cdot(r+1)/2$. Gleichheit gilt hier nur für $a = (0,\dots,r)$. Sei $W \subseteq U^{r+1}$ eine offene Umgebung von $(x,\dots,x)$, so dass für alle Nationalitäten a

$$\nu_a = (q_a \circ \mu)/u \in \mathcal{O}_{X^{r+1}}(W),$$

und sei der Morphismus

$$\nu: W \longrightarrow \Lambda^{r+1}\mathbb{A}^{n+1}$$

durch $q_a \circ \nu = \nu_a$ gegeben (d.h. $\nu = \mu/u$).

Dann ist

$$\nu_a(x,\dots,x) = \begin{cases} 1 & a = (0,\dots,r) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

$$\kappa\circ\nu: W \smallsetminus \nu^{-1}(o) \longrightarrow G(r,P^n) \subseteq P(\Lambda^{r+1}\mathbb{A}^{n+1})$$

ist ein Morphismus mit

$$\kappa\circ\nu(y_o,\dots,y_r) = \rho_r(y_o,\dots,y_r)$$

falls $y_o,\dots,y_r$ linear unabhängig sind oder falls $(y_o,\dots,y_r) = (x,\dots,x)$. Die zu $\rho_r\restriction(X^{r+1}\smallsetminus\text{Diagonale})$ gehörige rationale Abbildung $\bar\rho_r: X^{r+1} \dashrightarrow G(r,P)$ mit maximalem Definitionsbereich hat also $(x,\dots,x)$ im Definitionsbereich, und $\bar\rho_r(x,\dots,x) = \rho_r(x,\dots,x)$. Also ist ρ_r Morphismus auf X^{r+1}.

2.4.Beispiel. Eine glatte Kurve, deren 2-te Schmiegräume überall Dimension 1 haben. Sei chark = p>2 und

$$\phi: \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^4$$
$$u \longmapsto (u, u^p, u^{p^2}, u^{p^2+1}) \quad .$$

$X=\overline{\mathrm{Im}\phi} \subseteq \mathbb{P}^4$ ist eine glatte nichtausgeartete Kurve, und für $u \in \mathbb{A}^1$ ist $\Pi^2_{\phi(u),X}$ gegeben durch

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ u^p & 0 & 0 \\ u^{p^2} & 0 & 0 \\ u^{p^2+1} & u^{p^2} & 0 \end{bmatrix}$$

also $\Pi^2_{\phi(u),X} = \Pi_{\phi(u),X}$. Für alle $u \in \mathbb{A}^1$ haben die Sekantenebenen mehrere Grenzlagen über $(\phi u, \phi u, \phi u)$, denn für die Kurve

$$Y_w = \chi^{-1} \circ \phi\times\phi\times\phi(\{(u,u+v,u+wv) : v \in \mathbb{A}^1\}) \subseteq Sc(2,X)$$

ist

$$Y_w \cap X^{-1} \circ \phi\times\phi\times\phi((u,u,u)) = \begin{cases} \ell(\Pi_{\phi u,X}, (0:0:1:0:0)) & \text{falls } w^{p-1} \neq 1 \\ \\ \ell(\Pi_{\phi u,X}, (0:0:0:0:1)) & \text{falls } w^{p-1} = 1 \end{cases}$$

Auch wenn auf einer Kurve X $\dim \Pi^r_{x,X} = r$ für fast alle $x \in X$ ist, so liefert der Morphismus $\delta_r: X \longrightarrow G(r,P)$ (siehe

Bemerkung nach 1.2) im allgemeinen keine Fortsetzung der rationalen Abbildung $\gamma\circ\chi^{-1}: X^{r+1} \longrightarrow \mathrm{Sec}(r,X)$ auf die Diagonale von X^{r+1}.

Für das Folgende benötigen wir zwei Hilfssätze über das Verhalten der Schmiegräume und der "Krummheit" bei linearen Projektionen. Sei also $z\in P$, $H\subseteq P$ eine Hyperebene mit $z\notin H$, $\phi': P\setminus\{z\} \longrightarrow H$ die Projektion von z aus, $X\subseteq P$ eine (glatte) Kurve, $Y\subseteq H$ der Abschluss von $\phi'(X\setminus\{z\})$ und $\phi: X \longrightarrow Y$ der von ϕ' induzierte Morphismus. Für $x\in X$ ist $d_x\phi: T_{x,X} \longrightarrow T_{\phi(x),Y}$ das Differential von ϕ bei x. ϕ ist unverzweigt bei x, wenn $d_x\phi$ injektiv ist.

2.5.Lemma. Für alle $x\in X$ gelten:

(i) $x \neq z \Longrightarrow (\phi$ unverzweigt bei $x \Longleftrightarrow z\notin\Pi_{x,X})$,

(ii) $x = z \Longrightarrow (\phi x = \Pi_{x,X}\cap H$ und

$(\phi$ unverzweigt bei $x \Longleftrightarrow \dim \Pi^2_{x,X} = 2))$.

Wenn $y = \phi x\in Y$ glatt, ϕ unverzweigt bei x und $o\leq r$ ist, so gelten

(iii) $x \neq z \Longrightarrow \Pi^r_{y,Y} = \ell(\Pi^r_{x,X},z)\cap H$,

(iv) $x = z \longrightarrow \Pi^r_{y,Y} = \Pi^{r+1}_{x,X}\cap H$.

Beweis. Wähle homogene Koordinaten $T_o,\dots,T_n$ auf P, so dass $z = (0:\dots:0:1)$ und $H = \{T_n = 0\}$ ist. $S_o,\dots,S_{n-1}$ seien die induzierten homogenen Koordinaten auf H.

Sei zunächst $x \neq z$. (i) ist wohlbekannt (folgt z.B. aus [16, chapter II, § 5.5 Corollary 1]).

Für (iii) ist O.B.d.A. $T_o(x) \neq 0$. Dann ist $S_o(y) \neq 0$. Seien $f_i = T_i/T_o \lceil X \in \mathcal{O}_{x,X}$ (für $o \leq i \leq n$) und $g_i = S_i/S_o \lceil Y \in \mathcal{O}_{y,Y}$ (für $o \leq i \leq n-1$), und $s \in \mathcal{O}_{y,Y}$ ein lokaler Parameter.

$d_x\phi : T_{x,X} \longrightarrow T_{y,Y}$ ist injektiv, also ein Isomorphismus, und folglich ist $t = \phi^* s \in \mathcal{O}_{x,X}$ ein lokaler Parameter.

Seien $\sum_{o \leq k} g_{ik}\, s^k$ beziehungsweise $\sum_{o \leq k} f_{ik} t^k$ die Taylorreihen von g_i beziehungsweise f_i. Für $o \leq i < n$, $o \leq k$ ist dann $g_{ik} = f_{ik}$. $\Pi^r_{x,X} \subsetneq P$ ist von $(f_{oo}:\dots:f_{no}),\dots,(f_{or}:\dots:f_{nr})$ erzeugt, und $\Pi^r_{y,Y}$ ist von $(f_{oo}:\dots:f_{n-1,o}: 0),\dots,$ $(f_{or}:\dots:f_{n-1,r}:0)$ erzeugt. Daraus folgt (iii).

Sei jetzt $x = z$, $t \in \mathcal{O}_{z,X}$ lokaler Parameter und $h_i = T_i/T_n \lceil X \in \mathcal{O}_{z,X}$ mit Taylorreihe $\sum_{o \leq k} h_{ik} t^k$. Für $o \leq r$ sei M_r die $(n+1)\times(r+1)$-Matrix

$$\begin{bmatrix} h_{oo} & h_{o1} & \dots & h_{or} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{no} & h_{n1} & \dots & h_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & h_{o1} & \dots & h_{or} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & h_{n-1,1} & \dots & h_{n-1,r} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

deren Spalten, projektiv aufgefasst, $\Pi^r_{z,X}$ erzeugen. Offensichtlich ist $\phi z = \Pi_{z,X} \cap H = (h_{01}:\ldots:h_{n-1,1}:0)$. O.B.d.A. ist $h_{01} \neq 0$, und $e = t/h_o \in \mathcal{O}_{z,X}$ ist Einheit mit Taylorreihe

$$\sum_{0 \leq \ell} e_\ell t^\ell = 1/(h_{01}+h_{02}t+\cdots) = 1/h_{01}-(h_{02}/h_{01}^2)\ t+\cdots$$

Für $0 \leq i \leq n-1$ ist $f_i = h_i/h_o \in \mathcal{O}_{z,X}$. Sei $W \subseteq X$ eine offene Umgebung von z mit

$$W \subseteq \phi^{-1}(\{S_o \neq 0\}) \cap \{T_n \neq 0\},$$

$$\forall i,\ 0 \leq i \leq n-1,\ f_i \in \mathcal{O}_X(W).$$

Dann ist für $w = (w_o:\ldots:w_n) \in W \setminus \{z\}$

$$h_o(w) \neq 0,\ f_o(w) = 1$$

$$\phi(w) = (w_o:\ldots:w_{n-1}:0) = (h_o(w):\ldots:h_{n-1}(w):0)$$
$$= (f_o(w):\ldots:f_{n-1}(w):0).$$

Mit der Identifikation $H \cap \{S_o \neq 0\} \cong \mathbb{A}^{n-1}$ ist also $\phi \restriction W\colon W \longrightarrow \mathbb{A}^{n-1}$ gegeben durch $(f_1,\ldots,f_{n-1})$. f_i hat die Taylorreihe

$$\sum_{1 \leq k} h_{ik} t^{k-1} \cdot \sum_{0 \leq \ell} e_\ell t^\ell = h_{i1}e_o + (h_{i1}e_1+h_{i2}e_o)t+\cdots$$

Also ist $d_z f_i = (e_1 h_{i1}+e_o h_{i2}) d_z t$. Das Differential

$$d_z\phi\colon T_{z,X} = T_{z,W} \longrightarrow T_{y,Y} = T_{y,\mathbb{A}^{n-1}} \cong \mathbb{A}^{n-1}$$

ist gegeben durch

$$d_z\phi = (d_z f_1,\ldots,d_z f_{n-1})$$
$$= (e_1(h_{11},\ldots,h_{n-1,1}) + e_o\ (h_{12},\ldots,h_{n-1,2}))d_z t.$$

Da $t \in \mathcal{O}_{z,X}$ lokaler Parameter ist, ist $d_z t \neq 0$. Also gilt

$d_z\phi$ injektiv

$\Longleftrightarrow$ $-h_{02}/h_{01}^2 \, (h_{11},\ldots,h_{n-1,1}) + 1/h_{01} \, (h_{12},\ldots,h_{n-1,2}) \neq 0$

$\Longleftrightarrow$ $(h_{01},h_{11},\ldots,h_{n-1,1})$ und $(h_{02},h_{12},\ldots,h_{n-1,2})$ sind linear unabhängig

$\Longleftrightarrow$ Rang $M_2 = 3$

$\Longleftrightarrow$ $\dim \Pi^2_{z,X} = 2.$

Damit ist (ii) bewiesen.

Sei jetzt ausserdem $y = \phi z \in Y$ glatt und $d_z\phi$ injektiv, weiterhin $s \in \mathcal{O}_{y,Y}$ lokaler Parameter und $t = \phi^* s \in \mathcal{O}_{z,X}$. t ist lokaler Parameter, und wir verwenden die obigen Bezeichnungen. Für die Taylorreihe $\sum_{0 \le k} g_{ik} s^k$ von $g_i = S_i/S_o \lceil Y$ gilt

$$g_{ik} = f_{ik} = \sum_{0 \le j \le k} h_{i,j+1} \, e_{k-j}$$

Also ist $\Pi^r_{y,Y}$ der von $(h_{01}:\ldots:h_{n-1,1}:0),\ldots,(h_{o,r+1}:\ldots:h_{n-1,r+1}:0)$ aufgespannte Raum, also gleich $\Pi^{r+1}_{z,X} \cap H$. Damit ist das Lemma bewiesen.

2.6.Lemma. Sei $r \ge 2$, $X \subseteq P$ r-krumm, $z \in X$ und $\phi: X \longrightarrow Y$ von der Projektion von z aus induziert. Dann ist ϕ ein Isomorphismus, und Y ist $(r-1)$-krumm.

Beweis. ϕ ist bijektiv, da X 2-krumm ist, ausserdem projektiv, also endlich. Nach (i) und (ii) von Lemma 2.5 ist $d_x\phi$ injektiv für alle $x \in X$, also nach [16, II § 5.5] ein Isomorphismus.

Aus 2.5. (iii) und (iv) folgt, dass Y $(r-1)$-krumm ist, denn seien etwa $y_o,\ldots,y_s \in Y$ paarweise verschieden, $a_o+\cdots+a_s + s = r-1$ und $x_i = \phi^{-1}(y_i)$. Falls $z \notin \{x_o,\ldots,x_s\}$, so ist nach (iii)

$$\ell(\Pi^{a_o}_{y_o,Y},\ldots,\Pi^{a_s}_{y_s,Y}) = \ell(\Pi^{a_o}_{x_o,X},\ldots,\Pi^{a_s}_{x_s,X},\Pi^{o}_{z,X})\cap H$$

und hat Dimension $r-1$. Entsprechend benutzt man (iv), falls $z\in\{x_o,\ldots x_s\}$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Im Folgenden sei $o\leq r\leq \dim P-2$. Für eine r-krumme Kurve $X\subsetneq P$ haben wir

$$\begin{array}{ccc} Sc(r,X) & \xrightarrow{\ \gamma\ } & Sec(r,X) \\ {\scriptstyle \chi}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow \\ X^{r+1} & \xrightarrow[\ \rho_r\ ]{} & G(r,P) \end{array} .$$

Wir wollen zeigen, dass $\gamma\circ\chi^{-1}$ separabel vom Grad $(r+1)!$ ist. Ein $L\in Sec(r,X)$ heisst Multisekante, wenn $\# L\cap X\geq r+2$ ist.

2.7. Satz. Sei $X\subsetneq P$ r-krumm. Dann ist eine generische Sekante $L\in Sec(r,X)$ nicht Multisekante.

Beweis. Induktion nach r. $r=0$ ist klar.

$r=1$: Wenn eine generische Sekantengerade von X Multisekante ist, so erhält man durch Projektion von einem linearen Raum aus eine glatte Kurve $Y\subsetneq \mathbb{P}^3$ mit der gleichen Eigenschaft. Nach [8, IV.3.8 + 3.9] gibt es kein solches Y. Sei also $r\geq 2$. Dass eine generische Sekante in $Sec(r,X)$ Multisekante ist, ist aequivalent damit, dass es eine offene nichtleere Menge $U\subsetneq X^{r+1}$ gibt mit

$\forall (x_o,\dots,x_r) \in U : x_o,\dots,x_r$ linear unabhängig
und $\# (\ell(x_o,\dots,x_r) \cap X) \geq r+2$.

Sei ein solches U gegeben, $(z_o,\dots,z_{r-1},z) \in U$, $H \subsetneq P$ eine Hyperebene mit $z \notin H$, und $\phi: X \longrightarrow Y$ wie in Lemma 2.5 von der Projektion von z aus induziert. Nach Lemma 2.6 ist $Y \subseteq H$ eine $(r-1)$-krumme Kurve. Sei $\pi: X^{r+1} \longrightarrow X^r$ die Projektion auf die ersten Faktoren. Dann ist

$$W = (\phi \times \dots \times \phi) \circ \pi (U \cap (X^r \times \{z\})) \subseteq Y^r$$

offen nichtleer, und für $(y_o,\dots,y_{r-1}) \in Y^r$ mit $y_i = \phi x_i$ gilt:

$$(y_o,\dots,y_{r-1}) \in W \implies (x_o,\dots,x_{r-1},z) \in U$$

$\Longrightarrow x_o,\dots,x_{r-1},z$ linear unabhängig und
$\exists\, x \in (X \cap \ell(x_o,\dots,x_{r-1},z)) \setminus \{x_o,\dots,x_{r-1},z\}$

$\Longrightarrow y_o,\dots,y_{r-1}$ linear unabhängig und
$\exists\, y \in (Y \cap \ell(y_o,\dots,y_{r-1})) \setminus \{y_o,\dots,y_{r-1}\}$.

Also ist $Y \subseteq H$ eine $(r-1)$-krumme Kurve, und eine generische Sekante in $\mathrm{Sec}(r-1,Y)$ ist Multisekante, im Widerspruch zur Induktionsvorraussetzung. Damit ist der Satz bewiesen.

2.8. Bemerkung. In Charakteristik 0 ist für eine beliebige (nichtausgeartete, eventuell singuläre) Kurve $X \subseteq \mathbb{P}^n$ eine generische Sekante in $\mathrm{Sec}(n-2,X)$ nicht Multisekante (dies gilt dann natürlich auch für $r \leq n-2$). Andersfalls würde mehrfaches Anwenden einer Projektion wie im obigen Beweis eine (eventuell singuläre) Kurve $Y \subseteq \mathbb{P}^3$ liefern, deren generische Sekantengerade

in $Sec(1,Y)$ Multisekante ist. Dies geht nicht, weil es in Charakteristik 0 keine singulären Kurven mit lauter Multisekanten gibt (siehe [8, IV.3.8., Ex.3.8 + Ex.3.10]).

2.9.Satz. Sei X r-krumm. Dann ist $\gamma: Sc(r,X) \longrightarrow Sec(r,X)$ separabel mit Grad $(r+1)!$.

Beweis. Aus dem obigen Satz folgt, dass für ein generisches $L \in Sec(r,X)$ der Durchschnitt $X \cap L$ aus genau $r+1$ Punkten besteht, die linear unabhängig sind. Dann ist $\# \gamma^{-1}(L) = (r+1)!$. Es genügt also zu zeigen, dass γ separabel ist. Da $\chi: Sc(r,X) \longrightarrow X^{r+1}$ ein Isomorphismus ist, genügt es, ein $\xi = (x_o,\dots,x_r) \in X^{r+1}$ zu finden, so dass $d_\xi \rho_r$ injektiv ist, denn dann ist auch $d_{\pi^{-1}\xi}\gamma$ injektiv, also γ separabel. Sei

$$U = \{(x_o,\dots,x_r) \in X^{r+1}:\ x_o,\dots,x_r \text{ linear unabhängig und } \Pi_{x_r,X} \not\subseteq \ell(x_o,\dots,x_r)\}.$$

$U \subseteq X^{r+1}$ ist offen, ausserdem nichtleer, denn sonst wäre für eine Wahl von linear unabhängigen $x_1,\dots,x_r$

$$\forall x \in X \quad x \in \ell(x_1,\dots,x_{r-1},\Pi_{x_r,X}) \subsetneq P.$$

Für $o \leq i \leq r-1$ sei $\tau_i: X^{r+1} \longrightarrow X^{r+1}$ die Vertauschung des i-ten und des r-ten Faktors, und

$$(x_o,\dots,x_r) \in \tau_o U \cap \dots \cap \tau_{r-1} U \cap U \cap \rho_r^{-1}(\{\text{glatte Punkte von } Sec(r,X)\}).$$

Dann ist

$$\forall i \leq r \qquad \Pi_{x_i,X} \not\subseteq \ell(x_o,\ldots,x_r),$$

und es gibt eine Hyperebene H mit $x_o,\ldots,x_r \in H$ und

$$\forall i \leq r \qquad \Pi_{x_i,X} \not\subseteq H.$$

Wähle Koordinaten $T_o,\ldots,T_n$ auf P so dass $H = \{T_n = 0\}$ und

$$\forall i \leq r \qquad x_i = (1:0:\cdots:0:1:0:\cdots:0)$$

mit einer 1 an der Stelle i. Die Plückerkoordinaten T_a auf $G(r,P)$ sind durch die Nationalitäten $a = (a_o,\ldots,a_r)$ mit $0 \leq a_o \leq a_1 < \cdots < a_r \leq n$ indiziert. Sei $V = \mathrm{Sec}(r,X) \cap \{T_{o\ldots r} \neq 0\}$, $\xi = (x_o,\ldots,x_r)$, $\pi_i: X^{r+1} \longrightarrow X$ die Projektion auf den i-ten Faktor, und

$$W = \rho_r^{-1} V \cap \pi_o^{-1}(\{T_o \neq 0\}) \cap \ldots \cap \pi_r^{-1}(\{T_o \neq 0\}) \subseteq X^{r+1}$$

$$\forall j,\ o \leq j \leq r,\ g_j = \left(\frac{T_{o..\hat{j}..rn}}{T_{o..r}} \upharpoonright \mathrm{Sec}(r,X)\right) \in \mathcal{O}_{\mathrm{Sec}(r,X)}(V)$$

$$\forall i,j,\ o \leq i \leq r,\ o \leq j \leq n \qquad f_{ij} = \pi_i^*(T_j/T_o \upharpoonright X) \in \mathcal{O}_{X^{r+1}}(W).$$

Für alle $i \leq r$ ist $\Pi_{x_i,X} \not\subseteq \{T_n = 0\}$, also $(T_n/T_o \upharpoonright \Pi_{x_i,X}) \neq 0$, folglich $T_n/T_o \upharpoonright X \in \mathcal{O}_{x_i,X}$ ein lokaler Parameter, und

$f_{on},\ldots,f_{rn} \in \mathcal{O}_{\xi,X^{r+1}}$ bilden ein System von lokalen Parametern.

Für $y \in P$, $L \in G(r,P)$ gilt

$y \in L \iff$ für alle Nationalitäten $b = (b_o,\ldots,b_{r+1})$ ist

$$\sum_{o \leq j \leq r+1} (-1)^j T_{b_j}(y)\, T_{b_o\cdots\hat{b}_j\cdots b_{r+1}}(L) = 0$$

Sei jetzt $(y_o,\ldots,y_r) \in W$ und $L = \rho_r(y_o,\ldots,y_r)$. Die obige bilineare Gleichung für $b = (o,\ldots,r,n)$ liefert nach Division durch $T_o(y_i)\ T_{o\ldots r}(L)$ folgende Gleichung in $\mathcal{O}_{X^{r+1}}(W)$ (wobei wir ρ für $\rho_r|W$ schreiben):

$$\forall i \le r\ \ \rho^*(g_o) + \sum_{1\le j\le r} (-1)^j f_{ij}\rho^*(g_j) + (-1)^{r+1} f_{in} = 0$$

Wir betrachten das Differential hiervon an der Stelle $\xi \in W$. Dabei sei $S = \rho_r(\xi)$ und $\rho^*\colon T^*_{S,\mathrm{Sec}(r,X)} \longrightarrow T^*_{\xi,X^{r+1}}$ dual zu $d_\xi\rho_r$. Dann ist $g_j(S) = 0$ für $o \le j \le r$, und wir erhalten folgende Gleichungen im Kotangentialraum $T^*_{\xi,X^{r+1}} = m_{\xi,X^{r+1}}/m^2_{\xi,X^{r+1}}$:

$$\forall\ i,\ 1\le i\le r,\ 0 = d_\xi(\rho_r^*(g_o)) +$$

$$+ \sum_{1\le j\le r} (-1)^j (g_j(S)\cdot d_\xi f_{ij} + f_{ij}(\xi)\cdot d_\xi(\rho_r^*(g_j))) + (-1)^{r+1} d_\xi(f_{in})$$

$$= \rho^*(d_S(g_o)) + (-1)^i \rho^*(d_S(g_i)) + (-1)^{r+1} d_\xi(f_{in})$$

und für $i = 0$:

$$0 = \rho^*(d_S(g_o)) + (-1)^{r+1} d_\xi(f_{on}).$$

$T^*_{\xi,X^{r+1}}$ wird von $d_\xi(f_{on}),\ldots,d_\xi(f_{rn})$ erzeugt, also ist ρ^* surjektiv, und folglich $d_\xi\rho_r$ injektiv (sogar ein Isomorphismus). Damit ist der Satz bewiesen.

3. Eine exakte Sequenz und Plücker-Formeln

Sei $Y = \{(x_o,\ldots, x_r, L_o,\ldots, L_r) \in P^{r+1} \times G(0,P) \times G(1,P) \times \ldots \times G(r,P)$: $\forall\, i,\ o\leq i\leq r,\ \ell(x_i, L_{i-1}) \subseteq L_i\}$. Y ist eine abgeschlossene Untervarietät, irreduzibel mit $\dim Y = (r+1) \dim P$. Die Produktprojektionen induzieren Morphismen

$$\phi_i:\ Y \longrightarrow P$$

$$(x_o,\ldots, L_r) \longmapsto x_i$$

$$\psi_i:\ Y \longrightarrow G(i, P)$$

$$(x_o,\ldots, L_r) \longmapsto L_i$$

Sei weiter $J_i \longrightarrow G(i, P)$ das Inzidenzbündel (tautologisches Bündel), ein Unterbündel von $G(i, P) \times V \longrightarrow G(i, P)$ vom Rang $i+1$, und $E_i = \phi_i^* J_o$, $F_i = \psi_i^* J_i$. Dies sind Unterbündel von $Y\times V$ mit Rang 1, $i+1$. Ausserdem sei für $1\leq i\leq r$

$$W_i=\{(x_o,\ldots, L_r) \in Y:\ x_i \in L_{i-1}\}.$$

$W_i \subseteq Y$ ist ein irreduzibler Divisor, und das zugehörige Geradenbündel auf Y heisse G_i. Das folgende Lemma verallgemeinert die exakte Sequenz aus [14, Proposition 2.1] .

3.1. Lemma. Für $1\leq i\leq r$ gibt es eine natürliche exakte Sequenz auf Y

$$0 \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow F_i \longrightarrow E_i \otimes G_i \longrightarrow 0.$$

Beweis. Offensichtlich ist F_{i-1} Unterbündel von F_i. Sei

$$0 \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow F_i \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von Vektorbündeln über Y. Für $U=Y \setminus W_i$ und $y \in U$ ist $(E_i)_y \not\subseteq (F_{i-1})_y$, und

$$0 \longrightarrow (F_{i-1})_y \longrightarrow (F_i)_y \longrightarrow (E_i)_y \longrightarrow 0$$

exakte Folge von Vektorräumen über y. Also ist

$$0 \longrightarrow F_{i-1}\restriction U \longrightarrow F_i\restriction U \longrightarrow E_i\restriction U \longrightarrow 0$$

exakte Folge auf U, und da $Y \setminus U = W_i$ ein irreduzibler Divisor ist, gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $C \cong E_i \otimes G_i^m$. Seien $x_o, \ldots, x_r \in P$ linear unabhängig, $L = \ell(x_o, \ldots, x_i)$ und $Z = \phi_o^{-1}(x_o) \cap \ldots \cap \phi_{i-1}^{-1}(x_{i-1}) \cap \phi_{i+1}^{-1}(x_{i+1}) \cap \ldots \cap \phi_r^{-1}(x_r) \cap \psi_i^{-1}(L)$. $Z \subseteq Y$ ist eine irreduzible abgeschlossene Untervarietät, $\phi_i \restriction Z: Z \longrightarrow L$ ist ein Isomorphismus, und

$$0 \longrightarrow F_{i-1}\restriction Z \longrightarrow F_i\restriction Z \longrightarrow (E_i\restriction Z) \otimes (G_i\restriction Z)^m \longrightarrow 0$$

ist eine exakte Folge auf Z. Dabei sind $F_{i-1}\restriction Z$ beziehungsweise $F_i\restriction Z$ triviale Bündel vom Rang i beziehungsweise i+1, $E_i\restriction Z$ entspricht unter $\phi_i\restriction Z$ dem Inzidenzbündel auf $L \cong \mathbb{P}^i$, und $W_i \cap Z$ entspricht der Hyperebene $\ell(x_o, \ldots, x_{i-1})$ von L. Also entspricht $G_i\restriction Z$ dem Hyperebenenbündel $(E_i\restriction Z)^{-1}$. Wegen der exakten Folge ist $(E_i\restriction Z) \otimes (G_i\restriction Z)^m \cong (E_i\restriction Z)^{1-m}$ trivial, also m=1. Damit ist das Lemma bewiesen.

Im Folgenden bezeichnen wir für eine glatte irreduzible Varietät Z mit $A(Z) = \bigoplus_{o \leq i \leq \dim Z} A^i(Z)$ den Chowring von Z, graduiert durch die Kodimension. Ein eigentlicher Morphismus $\phi: Z \longrightarrow Z'$ liefert

einen Ringhomomorphismus $\phi^*: A(Z') \longrightarrow A(Z)$ und einen Gruppenhomomorphismus $\phi_*: A(Z) \longrightarrow A(Z')$. Für $z=z_0+\ldots+z_{\dim Z}$ $\in A(Z)$ bezeichnet $\int_Z z$ den Grad von z. Dann ist $\int_Z z = \int_Z z_{\dim Z} = \int_{Z'} \phi_*(z)$. Die Projektionsformel besagt, dass $\phi_*(z.\phi^*(z') = \phi_*(z).z'$ ist für $z' \in A(Z')$. Wenn $E \longrightarrow Z$ ein Vektorbündel vom Rang p ist, so ist $c(E)=1+c_1(E)+\ldots+c_p(E) \in A(Z)$ die Chernklasse von E, mit $c_i(E) \in A^i(Z)$. $s(E)=1+s_1(E)+\ldots=c(E)^{-1}$ ist die Segreklasse von E.

Sei $X \subseteq P$ eine r-krumme Kurve. Für $0 \leq i < j \leq r$ ist $D_{ij} = \{(x_0,\ldots,x_r) \in X^{r+1}: x_i = x_j\}$ eine Diagonale. D_{ij} ist ein irreduzibler Divisor, seine Klasse in $A^1(X^{r+1})$ sei d_{ij}. Sei für $0 \leq i \leq r$ ausserdem $\Pi_i: X^{r+1} \longrightarrow P$ die Projektion auf den i-ten Faktor, gefolgt von der Einbettung $X \subseteq P$, und

$$d_{ii} = \Pi_i^*(c_1(J_0)) = -\Pi_i^* \text{ (Hyperebenenklasse)} \in A^1(X^{r+1}).$$

Um die rationale Aequivalenzklasse von $\mathrm{Sec}(r,X)$ zu bestimmen, genügt es, die Urbilder der Chernklassen $c_0(J_r),\ldots,c_r(J_r)$ entlang des Morphismus $\rho_r: X^{r+1} \longrightarrow G(r,P)$ zu kennen, denn diese sind Ringerzeugende für $A(G(r,P))$. Der folgende Satz beschreibt diese Urbilder durch die "einfachen" Divisoren d_{ij}.

3.2. Satz. $\rho_r^*(c(J_r)) = (1+d_{oo})(1+d_{o1}+d_{11})\dots(1+d_{or}+\dots+d_{rr})$.

Beweis. Für $o \leq i \leq r$ ist X i-krumm. Wir betrachten die Morphismen

$$\sigma_i : \quad X^{r+1} \longrightarrow G(i,P)$$
$$(x_o,\dots,x_r) \longmapsto \rho_i(x_o,\dots,x_i)$$
$$\eta : \quad X^{r+1} \longrightarrow Y$$
$$(x_o,\dots,x_r) \longmapsto (x_o,\dots,x_r,\rho_o(x_o),\rho_1(x_o,x_1),\dots,\rho_r(x_o,\dots,x_r)) \; .$$

Wir haben also für $o \leq i \leq r$ das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & X^{r+1} & & \\ & \swarrow^{\sigma_i} & \downarrow^{\eta} & \searrow^{\Pi_i} & \\ G(i,P) & \xleftarrow[\psi_i]{} & Y & \xrightarrow[\phi_i]{} & P \end{array} \; .$$

Wir zeigen für $o \leq i \leq r$ mit Induktion nach i, dass

$$\sigma_i^*(c(J_i)) = (1+d_{oo})\dots(1+d_{oi}+\dots+d_{ii}) \; .$$

Die Behauptung des Satzes ist der Fall $i=r$.

Für $i=o$ ist $\rho_o = \Pi_o : X \hookrightarrow P$ die Einbettung, und $\sigma_o^*(c(J_o)) = 1 + \sigma_o^*(c_1(J_o)) = 1 + d_{oo}$.

Für $1 \leq i \leq r$ sei $w_i \in A^1(Y)$ die Klasse von W_i. Es genügt,

$$\eta^*(W_i) = D_{oi} + \dots + D_{i-1,i}$$

zu zeigen, denn dann ist

$$\begin{aligned} \sigma_i^*(c(J_i)) &= (\psi_i \circ \eta)^*(c(J_i)) = \eta^*(c(\psi_i^*(J_i))) \\ &= \eta^*(c(F_i)) = \eta^*(c(F_{i-1})c(E_i \otimes G_i)) \\ &= \eta^*(c(\psi_{i-1}^*(J_{i-1}))) \; \eta^*(1 + c_1(G_i) + c_1(E_i)) \\ &= (\psi_{i-1} \circ \eta)^*(c(J_{i-1})) \; (1 + \eta^*(w_i) + \eta^*(c_1(\phi_i^*(J_o)))) \\ &= \sigma_{i-1}^*(c(J_{i-1})) \; (1 + d_{oi} + \dots + d_{i-1,i} + \Pi_i^*(c_1(J_o))) \\ &= (1+d_{oo})\dots(1+d_{o,i-1}+\dots+d_{i-1,i-1})(1+d_{oi}+\dots+d_{ii}) \; . \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\eta^{-1}(W_i) = D_{oi} \cup \ldots \cup D_{i-1,i}$. η ist eine abgeschlossene Einbettung, und es genügt zu zeigen, dass $\eta(D_{oi})$ eine transversale Komponente des Durchschnitts von $Z = \eta(X^{r+1})$ und dem irreduziblen Divisor W_i ist. Hierzu genügt es, ein $x \in \eta(D_{oi})$ anzugeben, so dass $T_{x,Z} \not\subseteq T_{x,W_i}$ (als Unterräume von $T_{x,Y}$), denn dann ist x glatt auf W_i und Z, und die Tangentialräume schneiden eigentlich.

Wähle homogene Koordinaten $T_o,\ldots,T_n$ auf P, so dass für den k-ten Einheitspunkt $x_k = (0:\ldots:0:1:0:\ldots:0)$ gilt

$$o \leq k \leq r,\ k \neq i \Longrightarrow x_k \in X\ ,$$

$$\Pi_{x_o,X} = \ell(x_o,x_i)\ .$$

Sei weiterhin $x = \eta(x_o,\ldots,x_{i-1},x_o,x_{i+1},\ldots,x_r)$ und $U = \phi_o^{-1}(\{T_o \neq 0\}) \cap \ldots \cap \phi_{i-1}^{-1}(\{T_{i-1} \neq 0\}) \cap \phi_i^{-1}(\{T_o \neq 0\}) \subseteq Y$ mit $x \in U \cap \eta(D_{oi})$. Auf U betrachten wir folgende Funktionen

$$f_{kj} = \begin{cases} \phi_j^*(T_k/T_j) & o \leq k \leq n,\ o \leq j \leq i-1 \\ \phi_i^*(T_k/T_o) & o \leq k \leq n,\ j=i \end{cases}$$

$$f = \det \begin{bmatrix} f_{oo} & \cdots & f_{oi} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{io} & \cdots & f_{ii} \end{bmatrix}\ .$$

Für $(y_o,\ldots,y_r,L_o,\ldots,L_r) \in W_i \cap U$ sind $y_o,\ldots,y_i \in L_{i-1}$, also linear abhängig, und $f((y_o,\ldots,L_r)) = 0$, also $f \restriction W_i \cap U = 0$.

Auf T_{x,W_i} ist

$$0 = d_x f = d_x \Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}_{i+1}} \operatorname{sig}\sigma\ f_{o\sigma o} \cdots f_{i\sigma i}\Big)$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{Perm}_{i+1} \\ o \leq j \leq i}} \operatorname{sig}\sigma\ f_{o\sigma o} \cdots f_{j-1,\sigma(j-1)} f_{j+1,\sigma(j+1)} \cdots f_{i\sigma i}(x)\, d_x f_{j\sigma j}$$

$$= d_x f_{ii} - d_x f_{io}$$

denn die Koeffizienten sind 0 ausser für $(j,\sigma) = (i,id)$ oder $(j,\sigma) = (i$, Vertauschung von o und i$)$. Da $T_i/T_o \upharpoonright \Pi_{x_o,X} \neq 0$ ist, ist $(T_i/T_o \upharpoonright X) \in \mathcal{O}_{x_o,X}$ ein lokaler Parameter. Die Restriktionen von $d_x f_{ii}$ und $d_x f_{io}$ auf den Unterraum

$$T_{x,Z} = T_{x_o,X} \oplus \dots \oplus T_{x_{i-1},X} \oplus T_{x_o,X} \oplus T_{x_{i+1},X} \oplus \dots \oplus T_{x_r,X}$$

von $T_{x,Y}$ sind linear unabhängige Linearformen. Insbesondere ist $((d_x f_{ii} - d_x f_{io}) \upharpoonright T_{x,Z}) \neq 0$, also $T_{x,Z} \not\subseteq T_{x,W_i}$. Damit ist der Satz bewiesen.

In Charakteristik 0 hat man für alle $r \geq 0$ den Morphismus $\delta_r : X \longrightarrow G(r,P)$, wo $\delta_r(x)$ der r-te Schmiegraum bei x an X ist [7, chapter 2]. Wenn $d_r = \int_X \delta_r^*(s_1(J_r))$ und β_r die totale Verzweigung von δ_r ist, so gelten die Plückerformeln

$$\forall r,\ o \leq r \leq n-1,\quad 2g-2 = d_{r-1} - 2d_r + d_{r+1} + \beta_r .$$

Hierbei ist $d_{-1} = d_n = 0$, $d_o = d = \deg X$ und g das Geschlecht von X. Durch Summieren erhält man die äquivalente Menge von Formeln

$$\forall r,\ o \leq r \leq n-1,\quad d_r = (r+1)(d+r(g-1)) + \sum_{o \leq k \leq r-1} (r-k)\beta_k .$$

Sei jetzt $X \subseteq P$ eine r-krumme Kurve (in beliebiger Charakteristik). Wir definieren δ_r als Komposition des Diagonalmorphismus $\Delta_r : X \longrightarrow X^{r+1}$ mit $\rho_r : X^{r+1} \longrightarrow G(r,P)$. δ_r ist die Schmiegraumabbildung, die in der Bemerkung nach 1.2 erwähnt wurde. Im nächsten Satz zeigen wir, dass für $d_r = \int_X \delta_r^*(s_1(J_r))$ die Plückerformel mit $\beta_o = \dots = \beta_{r-1} = 0$ gilt. Dies ist zu erwarten, wenn $\delta_o, \dots, \delta_{r-1}$ abgeschlossene Einbettungen sind. In positiver Charakteristik können jedoch einige dieser Morphismen rein inseparabel sein.

Zunächst benötigen wir einen Hilfssatz.

3.3. Lemma. Sei $d_{ij} \in A^1(X^{r+1})$ die Klasse einer Diagonalen, und $k_X \in A^1(X)$ die kanonische Klasse. Dann ist $\Delta_r^*(d_{ij}) = -k_X$.

Beweis. O.B.d.A. ist $i=0$, $j=1$, und ausserdem $r=1$, da für $r \geq 2$ und d'_{01} $A^1(X^r)$ gilt

$$\Delta_r^*(d_{01}) = \Delta_{r-1}^*(d'_{01}).$$

Das Normalenbündel N_{Δ_1} auf X ist isomorph dem Tangentialbündel T_X, und nach der Selbstschnittformel [16, chapter VI, 1.4, Example 2] ist

$$\Delta_1^*(d_{01}) = \Delta_1^*(\Delta_{1*}(1)) = c_1(N_{\Delta_1}) = c_1(T_X) = -k_X.$$

3.4. Satz. Sei $X \subseteq P$ eine r-krumme Kurve. Dann gelten

(i) $d_r = (r+1)(d+r(g-1))$,

(ii) falls chark nicht r teilt, so ist δ_{r-1} eine abgeschlossene Einbettung,

(iii) falls p=chark >0 und p^e ein Teiler von r ist, so ist δ_{r-1} rein inseparabel mit Grad $\geq p^e$.

Beweis.

Es ist $\Delta_r^*(d_{rr}) = \delta_o^*(c_1(J_o)) = -$(Hyperebenendivisor auf X), und

$$\delta_r^*(s_1(J_r)) = \Delta_r^*(\rho_r^*(s_1(J_r))) = \Delta_r^*(-(d_{oo}+d_{o1}+\ldots+d_{rr}))$$

$$= (r(r+1)/2)k_X - (r+1)\rho_o^*(c_1(J_o)) .$$

Also ist

$$d_r = (r+1)(d+r(g-1)) .$$

Sei $x \in X$.

Wir wählen einen lokalen Parameter $t \in \mathcal{O}_{x,X}$ und homogene Koordinaten $T_o,\ldots,T_n$ auf P, so dass $T_o(x) \neq 0$ und die Taylorreihen $\sum_{o\leq k} f_{jk}t^k$ von $f_j = (T_j/T_o|X) \in \mathcal{O}_{x,X}$ die Gestalt haben

$$\begin{bmatrix} f_{oo} & \cdots & f_{or} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{no} & \cdots & f_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & & \end{bmatrix} .$$

Weiterhin mögen $T_{a_o \ldots a_{r-1}}$ die zugehörigen Plückerkoordinaten auf $G(r-1,P)$ bezeichnen, und es seien $z = \Delta_{r-1}(x)$, $Y = \delta_{r-1}(X)$, $\Pi_i: X^r \longrightarrow X$ die Projektion auf den i-ten Faktor und $t_i = \Pi_i^*(t) \in \mathcal{O}_{z,X^r}$.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\Delta_{r-1}} & X^r & \xrightarrow{\rho_{r-1}} & G(r-1,P) \\ & {\scriptstyle id}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \Pi_i} & & \\ & & X & & \end{array}$$

$y = \delta_{r-1}(x) = \rho_{r-1}(z) = \Pi^{r-1}_{x,X}$ wird von den ersten r Einheitspunkten aufgespannt, und $T_{o\ldots r-1}(z) \neq 0$. In $\mathcal{O}_{z,X^r}$ betrachten wir die Funktionen

$$q = \prod_{o \leq i < j \leq r-1} (t_j - t_i)$$

$$h = \rho^*_{r-1}(T_{o\ldots r-2,r}/T_{o\ldots r-1}),$$

$$g_a = \det \begin{bmatrix} \Pi^*_o(f_{a_o}) & \cdots & \Pi^*_{r-1}(f_{a_o}) \\ \vdots & & \vdots \\ \Pi^*_o(f_{a_{r-1}}) & \cdots & \Pi^*_{r-1}(f_{a_{r-1}}) \end{bmatrix}$$

wo $a = (a_o,\ldots,a_{r-1})$ eine Nationalität ist. Dann ist $h = g_{o\ldots r-2,r}/g_{o\ldots r-1}$, und die Taylorreihe von $\Pi^*_i(f_j)$ ist

$t_i^j + \sum_{r+1 \leq k} f_{jk} t_i^k$. Da

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_o & \cdots & t_{r-1} \\ \vdots & & \vdots \\ t_o^{r-2} & \cdots & t_{r-1}^{r-2} \\ t_o^r & \cdots & t_{r-1}^r \end{bmatrix} = q(t_o + \ldots + t_{r-1})$$

ist, gibt es Einheiten $e_1, e_2 \in \mathcal{O}_{z,X^r}$ mit $g_{o\ldots r-1} = q\, e_1$ und $g_{o\ldots r-2,r} = q(t_o+\ldots+t_{r-1})e_2$. Hieraus folgt, dass

$$\delta^*_{r-1}(T_{o\ldots r-2,r}/T_{o\ldots r-1}) = \Delta^*_{r-1}(t_o+\ldots+t_{r-1})\ \Delta^*_{r-1}(e_2/e_1)$$
$$= r\ t\ \Delta^*_{r-1}(e_2/e_1).$$

Wenn chark kein Teiler von r ist, so ist $r\,\Delta^*_{r-1}(e_2/e_1)\in\mathcal{O}_{x,X}$ eine Einheit, also δ_{r-1} unverzweigt bei x. Da δ_{r-1} injektiv ist, ist damit (ii) bewiesen ([16, chapter II, § 5.5 Lemma]).

Sei jetzt p = chark, $e\geq 1$ und p^e teile r. Das elementarsymmetrische Polynom $s\in k[t_o,\ldots,t_{r-1}]$ vom Grad $g\leq r$ hat genau $\binom{r}{g}$ Summanden, und es gilt

$$p \mid \binom{r}{g} \text{ oder } p^e | g.$$

Da $\Delta^*_{r-1}(t_o) =\ldots= \Delta^*_{r-1}(t_{r-1}) = t$ ist, ist $\Delta^*_{r-1}(s)\in k[t^{p^e}]\subseteq\mathcal{O}_{x,X}$.

Für jede Nationalität a ist die Taylorreihe in $k[[t_o,\ldots,t_{r-1}]]$ von $g_a/q\in\mathcal{O}_{z,X^r}$ symmetrisch in $t_o,\ldots,t_{r-1}$, und also liegt die Taylorreihe von $\Delta^*_{r-1}(g_a/q)$ in $k[[t^{p^e}]]$. Die Funktionen $\{T_a/T_{o\ldots r-1}$: a Nationalität $\neq (o,\ldots,r-1)\}$ erzeugen das Ideal $m_{y,Y}$ in $\mathcal{O}_{y,Y}$, und die Taylorreihe von $\delta^*_{r-1}(T_a/T_{o\ldots r-1})$ $=\Delta^*_{r-1}(g_a/a)/\Delta^*_{r-1}(g_{o\ldots r-1}/q)$ liegt in $k[[t^{p^e}]]$. Folglich ist $\delta^*_{r-1}(\mathcal{O}_{y,Y})\subseteq\mathcal{O}_{x,X}\cap k[[t^{p^e}]]$, und für jedes $m>0$ mit $t^m\in\delta^*_{r-1}(\mathcal{O}_{y,Y})$ ist $m\geqq p^e$.

Dann ist auch $m\geqq p^e$ für jedes $m>0$ mit $t^m\in\delta^*_{r-1}(k(Y))$, denn für $f\in k(Y)$ mit $t^m = \delta^*_{r-1}(f)$ gibt es $x'\in X$, so dass $t-t(x')\in\mathcal{O}_{x',X}$ ein lokaler Parameter ist und $f\in\mathcal{O}_{\delta_{r-1}(x'),Y}$.

Da δ_{r-1} injektiv und folglich $\delta^*_{r-1}: k(Y) \hookrightarrow k(X)$ rein

inseparabel ist, hat das Minimalpolynom von t die Form $T^{p^{e'}}-b$. Dann ist $e' \geq e$ und $[k(X): k(Y)] \geq [k(Y)(t): k(Y)] \geq p^e$.

3.5.Korollar. Jede n-krumme Kurve in $\mathbb{P}^n$ ist eine rationale Normkurve.

Beweis. Sei $X \subseteq \mathbb{P}^n$ n-krumm. Da $A^1(\text{Punkt}) = 0$ ist, ist $0 = d_n = (n+1)(d+n(g-1))$, also $g = 0$ und $d = n$, also X eine rationale Normkurve.

Bemerkung. Vor kurzem hat Canuto [2] bewiesen, dass über $\mathbb{C}$ für eine generische Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ die Morphismen $\delta_o, \dots, \delta_{n-2}$ unverzweigt sind. Im allgemeinen ist der Verzweigungsindex

$$\beta_k(x) = \#\{r: \dim \Pi^r_{x,X} = k\}-1.$$

Klassisch heisst für eine Kurve in $\mathbb{P}^3$ d_1 der Rang der Kurve, d_2 die Klasse der Kurve.

4. Die rationale Aequivalenzklasse der Sekantenvarietät

Wir wollen jetzt ein Verfahren angeben, das die rationale Aequivalenzklasse s von $Sec(r,X)$ in $A(G(r,P))$ für eine r-krumme Kurve $X \subseteq P$ berechnet. Die Schubertklassen $\Omega(a_o \dots a_r;P)$, $0 \leqq a_o < a_1 < \dots < a_r \leqq \dim P = n$, bilden eine $\mathbb{Z}$-Basis von $A(G(r,P))$. (Siehe hierzu z.B. [11]). Die Poincaré-Dualität besagt, dass der Koeffizient ("Gradzahl" bei Schubert) von s bei $\Omega(a_o \dots a_r;P)$ gleich dem Grad $\int_{G(r,P)} s.\Omega(b_o \dots b_r;P)$ ist, mit $b_i = n-a_{r-i}$.

Die Potenzprodukte von $c_1(J_r), \dots, c_{r+1}(J_r)$ erzeugen $A(G(r,P))$ nach der Determinantenformel, und es genügt, für Potenzprodukte p davon mit Kodimension $r+1$ den Grad $\int_{G(r,P)} s.p$ zu berechnen.

Es ist $\rho_{r*}(1) = [k(Sec(r,X)) : k(X^{r+1})] .s = (r+1)!s$ nach Satz 2.9, also

$$\int_{X^{r+1}} \rho_r^*(p) = \int_{G(r,P)} \rho_{r*}(1)\, p = (r+1)! \int_{G(r,P)} sp \quad .$$

$\rho_r^*(p)$ ist eine Summe von Produkten der d_{ij} mit Kodimension $r+1$. Wir wollen zunächst den Grad eines einzigen solchen Produktes ausrechnen.

Hierzu sei $d = \deg X$ der Grad der Einbettung $X \subseteq P$, und $k = \int_X(\text{kanonischer Divisor } X) \text{ von } X) = 2g-2$, wo g das Geschlecht von X ist. Einem 0-dimensionalen Produkt der d_{ij} ordnen wir einen Graphen auf $\{0,\dots,r\}$ zu, indem wir i und j so oft verbinden, wie d_{ij} als Faktor vorkommt. Die Graphen, die hier auftreten,

sind also ungerichtet, eventuell mit Schleifen und mehrfachen Kanten. Wir werden zeigen, dass jede Zusammenhangskomponente des Graphen einen multiplikativen Beitrag $-d$ oder $-k$ liefert, je nachdem ob sie eine Schleife hat oder nicht.

Wir benötigen einige Bezeichnungen. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ nichtleer und endlich, $M^{(2)} = \{(i,j) \in M \times M: i \leq j\}$ das symmetrische Produkt, $H_M = \mathbb{N}^{M^{(2)}}$ die Menge aller Graphen auf M und

$G_M = \{g \in H_M$: jede Zusammenhangskomponente von g hat gleichviel Punkte wie Kanten$\}$.

Für $(i,j) \in M^{(2)}$ haben wir eine Divisorenklasse $d_{ij}(M) \in A^1(X^M)$ mit

$$d_{ij}(M) = \begin{cases} \text{Klasse von } \{x_i = x_j\} & \text{falls } i \neq j \\ \\ -(i\text{-te Projektion})^*(\text{Hyperebenenklasse}) & \text{falls } i = j \end{cases}$$

und eine Abbildung

$$\lambda_M: H_M \longrightarrow A(X^M)$$
$$(h_{ij}) \longmapsto \prod_{(i,j)\in M^{(2)}} d_{ij}(M)^{h_{ij}} .$$

Hier ist X^M als Varietät isomorph zu $X^{\# M}$, wobei die Projektionen $X^M \longrightarrow X$ durch M indiziert sind. Für $g \in G_M$ setzen wir

$$\int g = (-d)^p(-k)^q,$$

wo $p+q$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von g ist, und p die Zahl derjenigen, die mindestens eine Schleife haben.

Die obige Behauptung über den Grad eines Produktes folgt aus dem nächsten Satz, wenn man $M = \{0,\ldots,r\}$ setzt.

4.1.Satz. Für alle $g \in H_M$ ist

$$\int_{X^M} \lambda_M(g) = \begin{cases} \int g & \text{falls } g \in G_M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Beweis. Induktion nach $\# M$.

Falls $\# M = 1$ ist, etwa $M = \{m\}$, so ist $H_M = \mathbb{N}^{\{(m,m)\}}$.

Für $g \in H_M$ ist

$$g \in G_M \iff g((m,m)) = 1$$

$$\lambda_M(g) = \begin{cases} 1 & \text{falls } g((m,m)) = 0 \\ d_{mm}(M) & \text{falls } g((m,m)) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\int_X d_{mm}(M) = -\int_X (\text{Hyperebenenklasse von } X) = -d$.

Hieraus folgt die Behauptung für $\# M = 1$.

Sei jetzt $\# M \geqq 2$, und zunächst sei g nicht zusammenhängend. Sei dann g_1 eine Zusammenhangskomponente von g mit Punktmenge $M_1 \subseteq M$, $M_2 = M \setminus M_1$, $g_2 = g \restriction M_2^{(2)}$ und für $k = 1,2$

$$\Pi_k : X^M \longrightarrow X^{M_k}$$

die Projektionen. Dann gelten

$$g_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } (i,j) \in (M_1 \times M_2) \cup (M_2 \times M_1) \\ (g_k)_{ij} & \text{falls } (i,j) \in M_k \times M_k \text{ und } k \in \{1,2\} \end{cases} ,$$

$$g \in G_m \iff g_1 \in G_{M_1} \text{ und } g_2 \in G_{M_2}$$

$$\Longrightarrow \int g = \int g_1 \cdot \int g_2 ,$$

$$\forall (i,j) \in M_k \times M_k \quad d_{ij}(M) = \Pi_k^*(d_{ij}(M_k)) .$$

Also ist

$$\int_{X^M}\lambda_M(g) = \int_{X^M} \Big(\prod_{(i,j)\in M_1^{(2)}} d_{ij}(M)^{g_{ij}} \prod_{(i,j)\in M_2^{(2)}} d_{ij}(M)^{g_{ij}} \Big)$$

$$= \int_{X^M} \Pi_1^*(\lambda_{M_1}(g_1)) \cdot \Pi_2^*(\lambda_{M_2}(g_2))$$

$$= \int_{X^{M_1}} \lambda_{M_1}(g_1) \cdot \Pi_{1*}(\Pi_2^*(\lambda_{M_2}(g_2)))$$

$$= \int_{X^{M_1}} \lambda_{M_1}(g_1) \cdot \int_{X^{M_2}} \lambda_{M_2}(g_2) = \begin{cases} \int g & \text{falls } g\in G_M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Damit ist der Fall erledigt, dass g nicht zusammenhängend ist. Sei jetzt g zusammenhängend. Dann ist $\lambda_M(g)\in A^i(X^M)$, wo i die Anzahl Kanten von g ist, also

$$g\notin G_M \iff i \neq \# M \implies \int_{X^M} \lambda_M(g) = 0.$$

Sei also $g\in G_m$, und für $m\in M$ sei

$$\gamma(m) = \sum_{\substack{j\in M\\ j\leq m}} g_{jm} + \sum_{\substack{j\in M\\ m<j}} g_{mj}$$

der Grad von m in g. Wir unterscheiden drei Fälle.

1. Fall. Es gibt ein $e\in M$ mit $\gamma(e) = 1$. Dann ist e ein Endpunkt von g, und wegen $\# M \geq 2$ ist $g_{ee} = 0$, denn sonst wäre e ein isolierter Punkt und g nicht zusammenhängend. Sei e mit $m\in M$ verbunden, und etwa $m<e$, ausserdem $M_1 = M\setminus\{e\}$, $g_1 = g|M_1^{(2)}$ und $\Pi\colon X^M \longrightarrow X^{M_1}$ die Projektion. Dann ist $\int g = \int g_1$ und $\Pi_*(d_{me}(M)) = 1$, also

$$\int_{X^M} \lambda_M(g) = \int_{X^M} \prod_{(i,j)\in M_1^{(2)}} d_{ij}(M)^{g_{ij}}\, d_{me}(M)$$

$$= \int_{X^M} \Pi^*(\lambda_{M_1}(g_1))\, d_{me}(M) = \int_{X^{M_1}} \lambda_{M_1}(g_1)\, \Pi_*(d_{me}(M)) = \int g_1 = \int g.$$

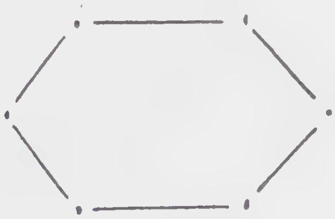
2. Fall. Es gibt kein $e \in M$ mit $\gamma(e) = 1$, und $\# M \geqq 3$.

Dann hat jedes $m \in M$ Grad $\gamma(m) = 2$, denn es ist $\gamma(m) \geqq 2$ und

$$\sum_{m\in M} \gamma(m) = 2\, \# \{\text{Kanten von } g\} = 2\, \# M.$$

Ausserdem ist $g_{mm} = 0$, denn sonst wäre (g ohne Schleife von m nach m) ein Baum, hätte also Endpunkte, und g dann auch. Schliesslich ist $g_{\ell,m} \leqq 1$ für alle $\ell, m \in M$, denn sonst würde man durch Zusammenlegen von ℓ und m einen Baum erhalten, der wieder Endpunkte hätte. g ist also ein Zykel auf M.

g:



Sei $m = \max M$ etwa mit ℓ_1 und ℓ_2 verbunden, $\ell_1 < \ell_2$, $M_1 = M \setminus \{m\}$, $g_1 = g \restriction M_1^{(2)}$ und $\Pi: X^M \longrightarrow X^{M_1}$ die Projektion. Dann ist

$$\Pi_*(d_{\ell_1 m}(M)\, d_{\ell_2 m}(M)) = d_{\ell_1 \ell_2},$$

denn die entsprechenden Diagonalen schneiden transversal, und ausserdem ist der Graph $g_2 = (g_1 + \text{Kante von } \ell_1 \text{ nach } \ell_2)$ in G_{M_1}, und $\int g = \int g_2 = -k$. Damit folgt, dass

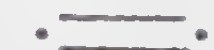
$$\int_{X^M} \lambda_M(g) = \int_{X^M} \prod_{(i,j)\in M_1^{(2)}} d_{ij}(M)^{g_{ij}} \; d_{\ell_1 m}(M)\; d_{\ell_2 m}(M)$$

$$= \int_{X^M} \Pi^*(\lambda_{M_1}(g_1)\; d_{\ell_1 m}(M)\; d_{\ell_2 m}(M)$$

$$= \int_{X^{M_1}} \lambda_{M_1}(g_1)\; \Pi_*(d_{\ell_1 m}(M)\; d_{\ell_2 m}(M))$$

$$= \int_{X^{M_1}} \lambda_{M_1}(g_2) = \int g_2 = \int g \; .$$

3. Fall. Es gibt kein $e\in M$ mit $\gamma(e) = 1$, und $\# M = 2$.

Dann ist g der Graph  . Für den Diagonalmorphismus $\Delta_1 : X \longrightarrow X^M \cong X^2$ ist nach Lemma 3.3

$$\int_{X^M} \lambda_M(g) = \int_{X^M} \Delta_*(1)^2 = \int_X \Delta^*(\Delta_*(1)) = \int_X -k_X$$

$$= -k = \int g \; .$$

Damit ist der Satz bewiesen.

5. Einige Gradzahlen, Cayley-Formeln

Die Ergebnisse der vorigen Abschnitte haben die Berechnung der rationalen Aequivalenzklasse s von $\mathrm{Sec}(r,X)$ in $G(r,P)$ für eine r-krumme Kurve $X \subseteq P$ auf kombinatorische Probleme reduziert. Um nämlich die Gradzahl $\int_{G(r,P)} s\Omega(b;P)$ zu berechnen, stelle man $\Omega(b;P)$ nach der Determinantenformel als Polynom in $c_1(J_r),\dots,c_{r+1}(J_r)$ dar. ρ_r^* von diesem Polynom ist ein Polynom in $d_{oo},d_{o1},\dots,d_{rr}$, dessen Grad α man nach Satz 4.1 ausrechnen kann. Dann ist $\alpha/(r+1)!$ die gesuchte Gradzahl.

Insbesondere haben wir gezeigt, dass s nur vom Geschlecht von X und dem Grad der Einbettung abhängt.

Im Folgenden wollen wir einige Fälle der kombinatorischen Aufgabe behandeln. Wir bemerken zunächst, dass $(-1)^i c_i(J_r)$ eine Klasse mit nichtnegativen Gradzahlen ("effektiv") ist. Ein Repräsentant für diese Klasse ist die irreduzible Schubertvarietät

$$\{L \in G(r,P):\ \dim L \cap H \geqq i-1\}$$

wobei $H \in G(n-r+i-2,P)$ ist.

5.1. Berechne $\lambda(r) = \int_{G(r,P)} s\cdot(-1)^{r+1}c_{r+1}(J_r)$.

Sei $\Pi\colon X^{r+1} \longrightarrow X^r$ die Projektion auf die ersten Faktoren.

Es ist

$$\lambda(0) = \int_P (\text{Klasse von } X)\cdot(-c_1(J_o))$$

$$= \int_X -d_{oo} = d,$$

$$\Pi_*(d_{ir}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq i < r \\ -d & i = r \end{cases}$$

$$\lambda(r) = \frac{1}{(r+1)!} \int_{X^{r+1}} \rho_r^*((-1)^{r+1}(c_{r+1}(J_r)))$$

$$= \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \int_{X^{r+1}} d_{oo}(d_{o1}+d_{11})\dots(d_{or}+\dots+d_{rr})$$

$$= \frac{-1}{(r+1)!} \int_{X^{r+1}} \Pi^*(\rho_{r-1}^*((-1)^r c_r(J_{r-1})))\ (d_{or}+\dots+d_{rr})$$

$$= \frac{-1}{(r+1)!} \int_{X^r} \rho_{r-1}^*((-1)^r c_r(J_{r-1}))\ (r-d) = \frac{d-r}{r+1}\ \lambda(r-1).$$

Damit folgt, dass $\lambda(r) = \binom{d}{r+1}$.

Anschaulich ist dies klar, denn für eine generische Hyperebene $H \subsetneq P$ ist $(-1)^{r+1} c_{r+1}(J_r)$ die Klasse von $\Omega = \{L \in G(r,P) : L \subseteq H\}$. $X \cap H$ besteht aus genau d Punkten, und $\Omega \cap Sec(r,X)$ besteht aus den $\binom{d}{r+1}$ vielen r-dimensionalen Räumen, die von diesen d Punkten erzeugt werden.

5.2. Berechne $\mu(r) = (-1)^{r+1} \int_{G(r,P)} s\ c_1(J_r)\ c_r(J_r)$

Sei $\Pi: X^{r+1} \longrightarrow X^r$ die Projektion auf die ersten r Faktoren, $\Pi_i: X^{r+1} \longrightarrow X$ bzw. $\Pi_i^!: X^r \longrightarrow X$ die Produktprojektionen,

und für $o \leq j \leq r$ sei $e_j = d_{oj} + \ldots + d_{jj} \in A^1(X^{r+1})$. Mit d'_{ij} bezeichnen wir die entsprechenden Divisorenklassen in $A^1(X^r)$. Dann ist $\Pi^*(d'_{ij}) = d_{ij}$ und

$$\rho_r^*(c_1(J_r)\, c_r(J_r)) = (e_o + \ldots + e_r) \sum_{o \leq \ell \leq r} e_o \ldots \hat{e}_\ell \ldots e_r$$

$$= ((e_o + \ldots + e_{r-1}) \sum_{o \leq \ell \leq r-1} e_o \ldots \hat{e}_\ell \ldots e_{r-1})\, e_r$$

$$+ (e_o + \ldots + e_{r-1}) e_o \ldots e_{r-1} + e_r e_o \ldots e_{r-1}$$

$$+ e_r \, (\sum_{o \leq \ell \leq r-1} e_o \ldots \hat{e}_\ell \ldots e_{r-1})\, e_r$$

$$= e_r\, \Pi^*(\rho_{r-1}^*(c_1(J_{r-1})\, c_{r-1}(J_{r-1}))) + 0$$

$$+ \rho_r^*(c_{r+1}(J_r)) + e_r^2\, \Pi^*(\rho_{r-1}^*(c_{r-1}(J_{r-1})))$$

Es ist

$$\Pi_*(e_r^2) = \Pi_*(2 \sum_{o \leq i < j < r} d_{ir} d_{jr} + 2 d_{rr} \sum_{o \leq i < r} d_{ir} + \sum_{o \leq i < r} d_{ir}^2)$$

$$= 2 \sum_{o \leq i < j \leq r-1} d'_{ij} + 2 \sum_{o \leq i \leq r-1} d'_{ii} + \sum_{o \leq i \leq r-1} \Pi_i^*(-k_X)$$

$$= 2\, \rho_{r-1}^*(c_1(J_{r-1})) - \sum_{o \leq i \leq r-1} \Pi_i'^*(k_X) \,,$$

wo $k_X \in A^1(X)$ die kanonische Klasse ist. Sei

$$\nu(r) = \frac{1}{(r+1)!} \int_{X^{r+1}} \sum_{o \leq i \leq r} \Pi_i^*(k_X)\, \rho_r^*((-1)^r c_r(J_r)).$$

Anschaulich kann man $\nu(r)$ so bestimmen: Für generische $x \in X$ und $H \in G(n-2,P)$ ist $\Pi_o^*(\text{Klasse von } x) \cdot \rho_r^*((-1)^r c_r(J_r))$ die Klasse von $\{(x,x_1,\ldots,x_r) \in X^{r+1} : \dim \ell(x,x_1,\ldots,x_r) \cap H \geq r-1\}$. Für ein $(x,x_1,\ldots,x_r)$ in dieser Menge ist $x \notin H$ und $x,x_1,\ldots,x_r \in \ell(x,H) \cap X$. Die letzte Menge besteht aus d Punkten, es gibt also $(d-1)\ldots(d-r)$ solche $(x,x_1,\ldots,x_r)$. Also ist

$$\nu(r) = \frac{1}{(r+1)!} (r+1)k(d-1)\ldots(d-r) = k \binom{d-1}{r} .$$

Dies kann man nun mit Induktion nach r beweisen. Der Fall $r = 0$ ist klar. Sei $r \geq 1$.

$$\sum_{0\leq i\leq r} \Pi_i^*(k_X)\ \rho_r^*(c_r(J_r))$$

$$= \sum_{0\leq i\leq r} \Pi_i^*(k_X) \sum_{0\leq \ell\leq r} e_o\ldots\hat{e}_\ell\ldots e_r$$

$$= \Big(\sum_{0\leq i\leq r-1} \Pi_i^*(k_X) \sum_{0\leq \ell\leq r-1} e_o\ldots\hat{e}_\ell\ldots e_{r-1}\Big)\ e_r$$

$$+ \sum_{0\leq i\leq r-1} \Pi_i^*(k_X) e_o\ldots e_{r-1} + \Pi_r^*(k_X) e_o\ldots e_{r-1}$$

$$+ \Pi_r^*(k_X)\Big(\sum_{0\leq \ell\leq r-1} e_o\ldots\hat{e}_\ell\ldots e_{r-1}\Big)\ e_r$$

$$= e_r\ \Pi^*\Big(\sum_{0\leq i\leq r-1} \Pi_i'^*(k_X)\ \rho_{r-1}^*(c_{r-1}(J_{r-1}))\Big)$$

$$+ 0 + \Pi_r^*(k_X)\Pi^*(\rho_{r-1}^*(c_r(J_{r-1})))$$

$$+ \sum_{0\leq i\leq r-1} \Pi_r^*(k_X)\ d_{ir}\ \Pi^*(\rho_{r-1}^*(c_{r-1}(J_{r-1}))) .$$

$$\nu(r) = \frac{(-1)^r}{(r+1)!} \int_{X^{r+1}} \sum_{0\leq i\leq r} \Pi_i^*(k_X)\ \rho_r^*(c_r(J_r))$$

$$= \frac{(-1)^r}{(r+1)!} (r+1-d) \int_{X^r} \sum_{0\leq i\leq r-1} \Pi_i'^*(k_X)\rho_{r-1}^*(c_{r-1}(J_{r-1}))$$

$$+ \frac{(-1)^r}{(r+1)!} k \int_{X^r} \rho_{r-1}^*(c_r(J_{r-1}))$$

$$= \frac{d-r-1}{r+1}\ \nu(r-1) + \frac{k}{r+1}\ \lambda(r-1)$$

$$= \frac{d-r-1}{r+1}\ k \binom{d-1}{r-1} + \frac{k}{r+1} \binom{d}{r} = k \binom{d-1}{r} .$$

Damit erhalten wir

$$\mu(r) = \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \int_{X^{r+1}} \rho_r^*(c_1(J_r)\ c_r(J_r))$$

$$= \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \Big((r-d+2) \int_{X^r} \rho_{r-1}^*(c_1(J_{r-1})\ c_{r-1}(J_{r-1}))$$

$$- \int_{X^r} \sum_{0\leq i\leq r-1} \Pi_i^{!*}(k_X)\ \rho_{r-1}^*(c_{r-1}(J_{r-1}))$$

$$+ \int_{X^r} \rho_r^*(c_{r+1}(J_r)) \Big)$$

$$= \frac{d-r-2}{r+1}\ \mu(r-1) - \frac{1}{r+1}\ \nu(r-1) + \lambda(r)\ .$$

Die Lösung dieser Rekursion ist

$$\mu(r) = \binom{d-1}{r+1} (d-r-2) \sum_{0\leq i\leq r} \frac{d^2-(r-i)(d+k)}{(d-r+i)(d-r+i-1)(d-r+i-2)}$$

mit

$$\mu(0) = d\ .$$

5.3. Berechne $\alpha(r) = \int_{G(r,P)} s\cdot c(J_r)^{-1}$.

Hier ist $\sigma = \sum_{0\leq i} \sigma_i = s(J_r) = c(J_r)^{-1} \in A(G(r,P))$ die Segreklasse von J_r. Wenn $M\in G(n-r-i,P)$ ist, so ist σ_i die Klasse der irreduziblen Schubertvarietät

$$\sigma_i(M) = \{L\in G(r,P):\ L\cap M \neq \emptyset\}\ .$$

Sei $R = \{0,\ldots,r\}$ und für $i\in R$

$$s_i = d_{0i} + \ldots + d_{ii} \in A^1(X^{r+1})\ .$$

Dann ist

$$\rho_r^*(\sigma) = \rho_r^*(c(J_r))^{-1} = (1+s_0)^{-1}\ldots(1+s_r)^{-1}$$

$$= \sum_{0\leq g_0,\ldots,g_r} (-s_0)^{g_0}\ldots(-s_r)^{g_r}$$

$$= \sum_{\substack{g \in H_R \\ g_i = g_{oi}+..+g_{ii}}} (-1)^{g_o+..+g_r} \binom{g_o}{g_{oo}} \binom{g_1}{g_{o1}\ g_{11}} \cdots \binom{g_r}{g_{or}\cdot\cdot g_{rr}} \cdot$$

$$\cdot d_{oo}^{g_{oo}} d_{o1}^{g_{o1}} \cdots d_{rr}^{g_{rr}} \quad .$$

Für $M = \{m_o,\dots,m_s\} \subseteq \mathbb{N}$ mit $m_o < m_1 < \dots < m_s$ und $g \in H_M$ sei

$$f_M(g) = \prod_{o \leq j \leq s} \binom{g_{m_o m_j} + \dots + g_{m_j m_j}}{g_{m_o m_j} \ \dots \ g_{m_j m_j}} \ .$$

Zur Berechnung von $\alpha(r)$ unter Verwendung von Satz 4.1 zerlegen wir die zugehörige kombinatorische Summe, in dem wir die Zusammenhangskomponente von 0 in den auftretenden Graphen auszeichnen. Bei festgelegter Zusammenhangskomponente, etwa mit $s+1$ Elementen, erweist sich der zugehörige Faktor als

$$\frac{(r-s)!}{(-1)^{r-s}} \quad \alpha(r-s-1).$$

$$\alpha(r) = \frac{1}{(r+1)!} \int_{X^{r+1}} \rho_r^*(\sigma)$$

$$= \frac{1}{(r+1)!} \sum_{g \in H_R} (-1)^{g_{oo}+g_{o1}+\dots+g_{rr}} f_R(g) \int_{X^{r+1}} \lambda_R(g)$$

$$= \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{g \in G_R} f_R(g) \cdot \int g$$

$$= \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{0 \in M \subseteq R} \ \sum_{\substack{g \in G_M \\ \text{zusammenhängend}}} \ \sum_{h \in G_{R \setminus M}} f_R(g \cup h) \cdot \int g \cup h$$

$$=\frac{(-1)^{r+1}}{(r+1!}\sum_{\substack{0\in M\subseteq R\\ g\in G_M\\ \text{zushängend}}} f_M(g)\int g\cdot\sum_{h\in G_{R\setminus M}} f_{R\setminus M}(h)\int h\quad,$$

$$=\frac{1}{(r+1)!}\sum_{0\leq s\leq r}\Big(\sum_{\substack{g\in G_{\{0,\ldots,s\}}\\ \text{zushängend}}} f_{\{0,\ldots,s\}}(g)\cdot\int g\Big)\binom{r}{s}(-1)^{s+1}.$$

$$\cdot(r-s)!\ \alpha(r-s-1).$$

Für $M=R$ ist hier der zugehörige Faktor gleich 1, also $\alpha(-1) = 1$. Um den Zahlen $f_{\{0,\ldots,s\}}(g)$ eine kombinatorische Bedeutung zu geben, benötigen wir eine weitere Definition. Ein geordneter Graph auf $\{0,\ldots,s\}$ ist ein Graph $g\in H_{\{0,\ldots,s\}}$ zusammen mit Abbildungen

$$\mu_j\colon \{1,2,\ldots,g_{0j}+\ldots+g_{j-1,j}\} \longrightarrow \{0,\ldots,j-1\} \quad \text{für} \quad 0\leq j\leq s,$$

$$\text{mit}\quad \forall j\leq s\quad \forall i<j \quad \# \mu_j^{-1}(i) = g_{ij}.$$

Wenn alle $g_{ij}\in\{0,1\}$ sind, so ist dies gleichbedeutend damit, dass für jedes j die Kanten von j nach $\{0,\ldots,j-1\}$ geordnet sind. Wenn ein $g_{ij} = 2$ ist, alle anderen 0 oder 1, so ist "geordnet" gleichbedeutend mit einer Ordnung der Kanten von j nach $\{0,\ldots,j-1\}$, wobei zwei Ordnungen identifiziert werden, die sich nur um die Vertauschung der beiden doppelten Kanten unterscheiden.

Lediglich diese beiden Fälle treten im Folgenden auf.

Für $M\subseteq N$ mit $\# M = s+1$ sind die geordneten Graphen auf M genau die Objekte, die unter dem Ordnungsisomorphismus $\{0,\ldots,s\} \longrightarrow M$ den geordneten Graphen auf $\{0,\ldots,s\}$ entsprechen.

Sei für $s \geq o$ ausserdem $G_s = G_{\{o,..,s\}}, H_s = H_{\{o,..,s\}}$,

$f_s = f_{\{o,..,s\}}$ und

$\beta(s) = \#\{$geordnete Bäume auf $\{0,...,s\}\}$,

$\gamma(s) = \#\{$geordnete zusammenhängende Graphen auf

$\{o,..,s\}$ mit $s+1$ Kanten, ohne Schleifen$\}$.

Wenn $g \in G_s$ zusammenhängend ohne Schleife ist, so gibt es genau $f_s(g)$ geordnete Graphen, die durch Vergessen der Ordnung g liefern. Wenn $g \in G_s$ zusammenhängend mit Schleife ist, so hat g die Form "Baum + Schleife", und für alle j ist

$$\binom{g_{oj}+..+g_{jj}}{g_{oj} \,..\, g_{jj}} = (g_{oj}+...+g_{jj})! \quad .$$

Also ist

$$\sum_{\substack{g \in G_s \\ \text{zushängend} \\ \text{mit Schleife}}} f_s(g) = \sum_{\substack{b \in H_s \\ \text{Baum}}} \sum_{o \leqq j \leqq s} b_{o1}!(b_{02}+b_{12})! \cdots$$

$$\cdots (b_{oj}+...+b_{j-1,j}+1)! \cdots (b_{os}+...+b_{s-1,s})!$$

$$= \sum_{\substack{b \in H_s \\ \text{Baum}}} \sum_{o \leqq j \leqq s} (b_{oj}+...+b_{j-1,j}+1)\; b_{01}!(b_{02}+b_{12})! \cdots$$

$$\cdots (b_{os}+...+b_{s-1})!$$

$$= (2s+1) \cdot \beta(s) \quad .$$

Also ist für $r \geq 0$

$$(r+1)\cdot\alpha(r) = \sum_{0\leq s\leq r} \frac{(-1)^{s+1}}{s!} \alpha(r-s-1)((2s+1)\beta(s)(-d)+\gamma(s)(-k))$$

Wir berechnen zunächst $\beta(s)$. Sei $s \geq 1$ und g ein geordneter Baum auf $\{o,\ldots,s\}$. Wenn man in g die höchste Kante weglässt, die von s ausgeht (etwa nach ℓ), so erhält man eine Partition $M_1 \cup M_2 = \{o,\ldots,s\}$ mit $s \in M_1$, geordnete Bäume g_1, g_2 auf M_1, M_2, und $\ell \in M_2$. Diese Zuordnung liefert eine Bijektion zwischen den geordneten Bäumen auf $\{o,\ldots,s\}$ und solchen Systemen $(M_1, M_2, g_1, g_2, \ell)$. Also ist für $s \geq 1$

$$\beta(s) = \sum_{o\leq i\leq s-1} \#\{\text{Systeme } (M_1,M_2,g_1,g_2,\ell) \text{ mit } \# M_1 = i+1\}$$

$$= \sum_{o\leq i\leq s-1} \binom{s}{i} \beta(i)\beta(s-i-1)(s-i) = s! \sum_{o\leq i\leq s-1} \frac{\beta(i)}{i!} \frac{\beta(s-i-1)}{(s-i-1)!} ,$$

ausserdem $\beta(0) = 1$. Für die erzeugende ("exponentielle") Potenzreihe

$$b = \sum_{o\leq s} \frac{\beta(s)}{s!} x^s \in \mathbb{Q}[[x]]$$

gilt dann

$$b = xb^2+1$$

$$b = \frac{1}{2x} (1-(1-4x)^{1/2}) .$$

Für alle $s \geq o$ ist folglich

$$\beta(s) = \frac{(2s)!}{(s+1)!}$$

Hierbei ist

$$(1-4x)^{1/2} = \sum_{o\leq s} \binom{1/2}{s} (-4x)^s .$$

und für $s \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{C}$

$$\binom{t}{s} = \frac{t(t-1)\cdots(t-s+1)}{s!} .$$

Wir berechnen jetzt $\gamma(s)$. Sei g ein geordneter zusammenhängender Graph auf $\{o,\ldots,s\}$ mit $s+1$ Kanten, ohne Schleife. Einen solchen Graphen nennen wir Unizykel (er hat genau einen Zykel). Das Weglassen der höchsten Kante von s aus in g (etwa nach ℓ) ist eine wohldefinierte Operation und liefert eine Partition $M_1 \cup M_2 = \{o,\ldots,s\}$, geordnete zusammenhängende Graphen g_1, g_2 auf M_1, M_2, und $\ell \in \{o,\ldots,s-1\}$. Hierbei ist $s \in M_1$ und entweder ($M_2 = \emptyset$ und g_1 Baum) oder ($\ell \in M_2$ und g_1 Unizykel und g_2 Baum) oder ($\ell \in M_2$ und g_1 Baum und g_2 Unizykel). Dies liefert eine Bijektion zwischen den Unizykeln auf $\{o,\ldots,s\}$ und solchen Systemen $(M_1, M_2, g_1, g_2, \ell)$. Also gilt für $s \geq o$

$$\gamma(s) = s\beta(s) + \sum_{o \leq i \leq s-1} \binom{s}{i}(s-i)(\gamma(i)\beta(s-i-1)+\beta(i)\gamma(s-i-1))$$

$$= s\beta(s) + 2s! \sum_{o \leq i \leq s-1} \frac{\gamma(i)}{i!} \frac{\beta(s-i-1)}{(s-i-1)!} .$$

Für die formale Potenzreihe $c = \sum_{o \leq s} \frac{\gamma(s)}{s!} x^s \in \mathbb{Q}[[x]]$ ist also

$$c = xb' + 2xbc$$

$$c = \frac{1}{2x}\left(\frac{1-2x}{1-4x} - (1-4x)^{-1/2}\right) .$$

Folglich ist

$$\gamma(s) = s!2^{2s} - \frac{(2s+1)!}{(s+1)!} .$$

Für $r \geq 0$ sei $a_r = \alpha(r-1)$. Dann ist $a_o = 1$ und für $r \geq 1$

$$r \cdot a_r = \sum_{0 \leq s \leq r-1} \frac{(-1)^{s+1}}{s!} \; a_{r-1-s} \cdot$$

$$\cdot (-d(2s+1) \frac{(2s)!}{(s+1)!} - k(s! \; 2^{2s} - \frac{(2s+1)!}{(s+1)!}))$$

$$= \sum_{0 \leq s \leq r-1} a_{r-1-s} (-1)^s ((d-k) \binom{2s+1}{s} + k \cdot 2^{2s}).$$

Wir betrachten die Potenzreihen in $\mathbb{Q}[[x]]$

$$p = \sum_{0 \leq s} (-1)^s \binom{2s+1}{s} x^s = (1-(1+4x)^{-1/2})/2x$$

$$q = \sum_{0 \leq s} (-1)^s 2^{2s} x^s = (1+4x)^{-1}$$

$$a = \sum_{0 \leq s} a_r x^r$$

Dann erfüllt a die Differentialgleichung

$$a' = (d-k) \; a \; p + k \; a \; q.$$

Diese Gleichung hat genau eine Lösung, nämlich

$$a = f^{d-k} \; (1+4x)^{k/4} \in \mathbb{Q}[[x]]$$

mit $f = 1 + \sum_{1 \leq r} (-1)^{r-1} \frac{1}{r} \binom{2r-2}{r-1} x^r = \frac{1}{2}(1+(1+4x)^{1/2}).$

Um die Koeffizienten von $f^s = \sum_{0 \leq r} f_{rs} x^r$ zu bestimmen, betrachten wir

$$g = \sum_{0 \leq r,s} g_{rs} x^r y^s = \sum_{0 \leq s} f^s y^s \in \mathbb{Q}[[x,y]].$$

Dann ist

$$g = (1-fy)^{-1} = (1-\frac{y}{2}-\frac{y}{2}(1+4x)^{1/2})^{-1}$$

$$= (1-\frac{y}{2}+\frac{y}{2}(1+4x)^{1/2})/(1-y-xy^2)$$

Für $(r,s)\in\mathbb{N}\times N$ mit $s\geqq 2$ liefert dies die Rekursionsgleichung

$$g_{rs} = g_{r,s-1} + g_{r-1,s-2} \quad ,$$

und ein Summand von g ist

$$(1-y-y^2x)^{-1} = \sum_{0\leqq r\leqq s} \binom{s-r}{r} x^r y^s .$$

In der obigen heuristischen Ueberlegung haben wir nicht den Fall $s<r$ betrachtet. Um die Behauptung

$$\forall\ (r,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z} \qquad f_{rs} = \binom{s-r}{r} + \binom{s-r-1}{r-1}$$

zu beweisen, genügt es, die Rekursionsgleichung

$$\forall\ (r,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z} \qquad f_{rs} = f_{r,s-1} + f_{r-1,s-2}$$

zu zeigen. (Es ist $\binom{i}{-1} = 0$ für $i\in\mathbb{Z}$.)

Diese Rekursionsgleichungen gelten, da

$$\forall s\in\mathbb{Z} \qquad f^s = f^{s-1} + x\cdot f^{s-2} .$$

$\alpha(r)$ ist der Koeffizient von x^{r+1} in a, und wir erhalten folgende Lösung unserer Aufgabe 5.3 :

$$\alpha(r) = \sum_{0\leqq s\leqq r+1} \left(\binom{d-k-s}{s} + \binom{d-k-s-1}{s-1}\right)\binom{k/4}{r-s+1} 4^{r-s+1} .$$

Wir bemerken noch, dass alle Summanden dieses Ausdrucks nichtnegativ sind, falls $r\leq d-k-2$ und $(k/4\in\mathbb{N}$ oder $r\leq k/4)$ ist.

5.4. Zwischen dem letzten Beispiel und klassischen Resultaten über Multisekanten besteht folgender Zusammenhang (siehe auch 5.7).

Sei $n = \dim P$, $2 \le r \le (n-1)/2$, $X \subseteq P$ eine r-krumme Kurve, $Z \in G(n-2r-1,P)$ und $M \in G(2r,P)$ mit $Z \cap M = \emptyset$. Die Projektion $\Pi' : P \setminus Z \longrightarrow M \simeq \mathbb{P}^{2r}$ induziert einen Morphismus $\Pi : X \longrightarrow Y = \Pi'(X)$. Für eine allgemeine Wahl von Z ist Π ein Isomorphismus, Y nichtausgeartet und $\deg Y = \deg X$. Sei

$$A(r) = \{L \in G(r-1,M) : \# Y \cap L = r+1\}.$$

In Charakteristik 0 gelten für ein generisches Z folgende Aussagen:

$Sec(r,X)$ und $\sigma_{r+1}(Z)$ schneiden transversal, für jede Diagonale $D_{ij} \subseteq X^{r+1}$ ist $\rho_r(D_{ij}) \cap \sigma_{r+1}(Z) = \emptyset$, für jedes $L' \in Sec(r,X) \cap \sigma_{r+1}(Z)$ ist $\dim(L' \cap Z) \le 0$ und $\# L' \cap X = r+1$.

Für ein solches Z liefert die Projektion

$$Sec(r,X) \cap \sigma_{r+1}(Z) \longrightarrow G(r-1,M)$$
$$L' \longmapsto \Pi'(L \setminus Z)$$

eine Bijektion zwischen $Sec(r,X) \cap \sigma_{r+1}(Z)$ und $A(r)$. Also ist dann $\# A(r) = \alpha(r)$.

Klassisch wurde $A(r)$ für eine beliebige Kurve $Y \subseteq P^{2r}$ untersucht (und auch andere Fälle solcher Multisekanten). Castelnuovo [3] ersetzt Y durch eine reduzible singuläre Kurve mit gleichem Geschlecht g und gleichem Grad d. Unter der Vorraussetzung, dass sich dabei die zugehörige Zahl $\# A(r)$ nicht ändert, findet er

$$\# A(r) = \sum_{o \leq i \leq g,(r+1)/2} (-1)^i \binom{g}{i} \binom{d-r-2i}{r+1-2i} .$$

Tanturri [17] (und Meyer 1883) untersucht allgemeinere Fälle von Multisekanten an rationale und elliptische Kurven mit ähnlichen Methoden. Als Spezialfall ihrer Resultate erhält man

$$\# A(r) = \begin{cases} \binom{d-r}{r+1} & \text{falls } X \text{ rational ist} \\ \frac{d}{r+1}\binom{d-r-2}{r} & \text{falls } X \text{ elliptisch ist.} \end{cases}$$

Auf anderem Weg erhält Severi [15] das gleiche Resultat für rationale Kurven, und Giambelli [6] ein wesentlich allgemeineres Ergebnis Diese Ausdrücke für $\# A(r)$ sind gleich dem Wert von $\alpha(r)$, der weiter oben für r-krumme Kurven ausgerechnet wurde.

5.5. Für $r \in \{1,2\}$ haben wir in 5.1, 5.2 und 5.3. die rationale Aequivalenzklasse s von $Sec(r,X)$ in $A(G(r,P))$ ausgerechnet.

Für $r = 1$ ist

$$s = \lambda(1)\Omega(1,2;P) + \alpha(1)\Omega(0,3;P) \in A(G(1,P)),$$

$$2\lambda(1) = d^2-d,$$

$$2\alpha(1) = 2(\mu(1)-\lambda(1)) = d^2-3d-k.$$

Der $\alpha(1)$ entsprechende Ausdruck auch für höherdimensionale Varietäten ist in [14, Theorem 3.4] und [12, Theorem 19] berechnet.

Für eine 2-krumme Kurve $X \subseteq P$ ist die Klasse s von $Sec(2,X)$ gleich

$$s = \lambda(2)\Omega(1,2,3;P) + (\mu(2)-\lambda(2))\Omega(0,2,4;P) + \alpha(2)\Omega(o,1,5;P)$$

$$6\ \lambda(2) = d^3-3d^2+2d \quad ,$$

$$6(\mu(2)-\lambda(2)) = 2d^3-12d^2+16d-3dk+6k \quad ,$$

$$6\alpha(2) = d^3-9d^2+20d-3dk+12k \quad .$$

5.6. Im Folgenden zeigen wir an einem Beispiel, dass für Kurven, die nicht r-krumm sind, die rationale Aequivalenzklasse von $Sex(r,X)$ nicht nur vom Grad der Einbettung und der Isomorphieklasse von X abhängt.

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^6$ eine 2-krumme Kurve mit

$$\alpha(2) = \frac{1}{6}(d-4)(d(d-5)-6(g-1)) \neq 0.$$

Es gibt eine offene nichtleere Menge $U \subseteq G(1,\mathbb{P}^6)$ so dass für alle $G \in U$ in $G(2,\mathbb{P}^6)$ gilt:

$Sec(2,X)$ und $\sigma_3(G)$ schneiden eigentlich.

Sei $G \in U$, $L \in Sec(2,X) \cap \sigma_3(G)$, $x \in L \cap G$ und $H \subseteq \mathbb{P}^6$ eine Hyperebene mit $x \notin H$. Dann ist $x \notin S$ für alle $S \in Sec(1,X)$. Die Projektion $\Pi': \mathbb{P}^6 \setminus \{x\} \longrightarrow H \cong P^5$ induziert einen Morphismus $\Pi: X \longrightarrow Y = \Pi'(X) \subseteq H$. Dann ist $degX = degY$ und Π ist ein Isomorphismus, also das Geschlecht von Y gleich dem von X. Y ist 1-krumm (d.h. glatt), aber nicht 2-krumm, denn die Gerade $\Pi'(L \setminus \{x\})$ ist eine Trisekante von Y. Wir werden zeigen, dass für ein $z \in H$

$$\int_{G(2,H)} Sec(2,Y) \cdot \sigma_3(z) < \alpha(2)$$

ist.

$T = \{M \in Sec(2,Y) : \ell(M \cap Y) \neq M\} \subseteq Sec(2,Y)$ ist in einer echten abgeschlossenen Untervarietät enthalten.

Die Abbildung

$$\phi: H \longrightarrow G(1,\mathbb{P}^6)$$

$$z \longmapsto \ell(z,x)$$

ist ein Isomorphismus von H mit $\sigma_5(x) \subseteq G(1,\mathbb{P}^6)$. Wir nehmen an, dass es $V \subseteq H$ offen und nichtleer gibt, so dass für alle $z \in V$ gilt:

$\mathrm{Sec}(2,Y)$ und $\sigma_3(z)$ schneiden transversal in $G(2,H)$,

$T \cap \sigma_3(z) = \emptyset$.

In Charakteristik 0 gibt es ein solches V nach [9]. Seien $z \in V \cap \phi^{-1}(U)$, $G' = \phi(z)$ und $M \in \mathrm{Sec}(2,Y) \cap \sigma_3(z)$. Es gibt $x_o, x_1, x_2 \in X$ mit $M = \ell(\Pi x_o, \Pi x_1, \Pi x_2)$. Sei weiter $M' = \ell(x_o, x_1, x_2) \in \mathrm{Sec}(2,X) \cap \sigma_3(G')$. Es ist $x \in L \cap G'$, also $L \in \mathrm{Sec}(2,X) \cap \sigma_3(G')$. Also gibt es höchstens

$$\alpha(2)-1 = \Big(\int_{G(2,\mathbb{P}^6)} \mathrm{Sec}(2,X) \cdot \sigma_3(G')\Big) - 1$$

solche $M' \neq L$, also höchstens $\alpha(2)-1$ solche M, denn die Zuordnung $M \longmapsto M'$ ist injektiv. Da $\mathrm{Sec}(2,Y)$ und $\sigma_3(z)$ transversal schneiden, ist also

$$\int_{G(2,H)} \mathrm{Sec}(2,Y) \cdot \sigma_3(z) < \alpha(2).$$

5.7. Die bisherigen Resultate betrafen "allgemeine" Sekantenräume von Kurven, die gewissen Schubertbedingungen unterworfen werden. Wir können aber auch Aussagen über "spezielle" Sekantenräume machen, wenn die Einbettung durch eine generische Projektion aus einer krummen Einbettung entsteht. Wir wollen dies im Folgenden für Kurven in $\mathbb{P}^3$ ausführen.

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^3$ eine nichtausgeartete, glatte Kurve. Wir betrachten folgende Zahlen:

t = Anzahl der Trisekantengeraden, die eine feste Gerade treffen,

p = Anzahl der Tangenten, die die Kurve in zwei Punkten treffen

q = Anzahl der Geraden, die die Kurve in vier Punkten treffen.

Die folgenden Formeln von Cayley bestimmen diese drei Zahlen aus dem Grad d und dem Geschlecht g von X:

$$t = (d-2)(\tfrac{1}{3}(d-1)(d-3)-g),$$

$$p = 2((d-2)(d-3) + g\ (d-6)),$$

$$q = \tfrac{1}{12}(d-2)(d-3)^2(d-4) - \tfrac{g}{2}\ (d^2-7d+13-g).$$

Diese Formeln gelten nicht für eine beliebige Einbettung. Die Ausdrücke für t und q finden sich in [4], ausführliche Bibliographie dazu in [5, Nr. 23, p. 1281].

5.7.Satz. Sei chark = 0, $X \subseteq P$ eine 3-krumme Kurve, $n = \dim P \geq 5$, $Z \in G(n-4,P)$ generisch und $Y \subseteq \mathbb{P}^3$ das Bild von X unter der Projektion $P \setminus Z \longrightarrow \mathbb{P}^3$. Dann gelten für Y die Cayley-Formeln.

Beweis. Wir können annehmen, dass $\mathbb{P}^3 \subseteq P$ ist mit $\mathbb{P}^3 \cap Z = \emptyset$. Sei

$$Z_{n-6} \subsetneq Z_{n-5} \subsetneq Z \subsetneq Z_{n-1} \subsetneq P$$

eine $(n-6,n-5,n-4,n-1,n)$-Fahne, ausserdem $G \in G(1,\mathbb{P}^3)$ so dass folgende Durchschnitte eigentlich sind:

in $G(1,P)$:	$\mathrm{Sec}(1,X)\cap\sigma_3(Z)$	$(=\emptyset)$
in $G(2,P)$:	$\mathrm{Sec}(2,X)\cap\sigma_2(Z)$	$(\dim = 1)$
	$\mathrm{Sec}(2,X)\cap\Omega(Z,\ell(Z,G),P;P)$	$(\dim = 0)$
	$\rho_2(D_{01})\cap\sigma_2(Z)$	$(\dim = 0)$
	$\rho_2(D_{01})\cap\Omega(Z,\ell(Z,G),P;P)$	$(=\emptyset)$
	$\rho_2(D_{01}\cap D_{02})\cap\sigma_2(Z)$	$(=\emptyset)$
	$\mathrm{Sec}(2,X)\cap\Omega(Z_{n-5},Z,P;P)$	$(=\emptyset)$
in $G(3,P)$:	$\mathrm{Sec}(3,X)\cap\Omega(Z_{n-5},Z,Z_{n-1},P;P)$	$(\dim = 0)$
	$\mathrm{Sec}(3,X)\cap\Omega(Z_{n-6},Z_{n-5},Z,P;P)$	$(=\emptyset)$
	$\mathrm{Sec}(3,X)\cap\Omega(Z_{n-5},Z,\ell(Z,G),P;P)$	$(=\emptyset)$
	$\rho_3(D_{01})\cap\Omega(Z_{n-5},Z,Z_{n-1},P;P)$	$(=\emptyset)$
in $G(4,P)$:	$\mathrm{Sec}(4,X)\cap(Z_{n-6},Z_{n-5},Z,Z_{n-1},P;P)$	$(=\emptyset)$

Die obigen Durchschnitte mit Dimension 0 seien ausserdem transversal, und es möge ein $H\in G(n-1,P)$ geben, so dass H und X transversal schneiden und $Z\subsetneq H$ ist. (Lediglich bei diesen Transversalitätsannahmen wird die Voraussetzung über die Charakteristik benutzt.) Wir zeigen, dass dann für Y die Cayley-Formeln gelten.

Die Projektion $\Pi\colon P\setminus Z \longrightarrow \mathbb{P}^3$ induziert folgende Morphismen, die wir alle mit Π bezeichnen:

$$\Pi\colon X \longrightarrow Y$$

$$\Pi\colon \sigma_2(Z)\setminus\Omega(Z_{n-5},Z,P;P) \longrightarrow G(1,\mathbb{P}^3),$$

$$\Pi\colon \Omega(Z_{n-5},Z,Z_{n-1},P;P)\setminus\Omega(Z_{n-6},Z_{n-5},Z,P;P) \longrightarrow G(1,\mathbb{P}^3) .$$

Der erste Morphismus ist Isomorphismus, und $\deg X = \deg Y$.

$$\Pi\colon \mathrm{Sec}(2,X)\cap\Omega(Z,\ell(Z,G),P;P) \longrightarrow \{\text{Trisekanten von } Y\text{, die } G \text{ schneiden}\}$$

ist bijektiv, denn wenn zwei Räume das gleiche Bild haben, so gehören dazu entweder genau 4 oder mindestens 5 Punkte von X. Das liefert einen Widerspruch zu den obigen Bedingungen.

Also ist

$$t = \# (\mathrm{Sec}(2,X) \cap \Omega(Z, \ell(Z,G), P; P))$$

$$= \int_{G(r,P)} \text{Klasse von } \mathrm{Sec}(2,X) \cdot \Omega(n-4, n-2, n; P)$$

$$= \mu(2) - \lambda(2) = (d-2)(\tfrac{1}{3}(d-1)(d-3)-g) .$$

$\pi: \rho_2(D_{01}) \cap \sigma_2(Z) \longrightarrow$ {Tangenten von Y, die Y in zwei Punkten schneiden}

ist bijektiv und $\rho_2 : D_{01} \longrightarrow \rho_2(D_{01})$ birational, also

$$p = \# \rho_2(D_{01}) \cap \sigma_2(Z)$$

$$= \int_{G(2,P)} \rho_{2*}(d_{01}) \cdot s_2(J_2) = \int_{X^3} d_{01} \cdot \rho_2^*(s_2(J_2))$$

$$= \int_{X^3} d_{01} \ (1-d_{oo})(1-(d_{01}+d_{11})+(d_{01}+d_{11})^2)(1-(d_{02}+d_{12}+d_{22})+ (d_{02}+d_{12}+d_{22})^2)$$

$$= 2d^2-8d-6k+dk$$

$$= 2((d-2)(d-3)+g(d-6)) .$$

$\pi: \mathrm{Sec}(3,X) \cap \Omega(Z_{n-5}, Z, Z_{n-1} P; P) \longrightarrow$ {Geraden, die Y in vier Punkten schneiden}

ist bijektiv. Also ist

$$q = \# \mathrm{Sec}(3,X) \cap \Omega(Z_{n-5}, Z, Z_{n-1}, P; P)$$

$$= \int_{G(3,P)} \text{Klasse von } \mathrm{Sec}(3,X) \cdot \Omega(n-5, n-4, n-1, n; P)$$

$$= \frac{1}{4!} \int_{X^4} \rho_3^*(\Omega(n-5, n-4, n-1, n; P))$$

$$= \frac{1}{24} \int_{X^4} \rho_3^*(c_2(J_3)^2 - c_1(J_3)c_3(J_3)) .$$

Wenn wir $e_i = d_{oi}+\ldots+d_{ii} \in A^1(X^4)$ setzen, so ist

$$a = \rho_3^*(c_2(J_3)) = e_o e_1 + e_o e_2 + e_1 e_2 + e_3(e_o+e_1+e_2)$$

die Komponente von Kodimension 2 von $(1+e_o)(1+e_2)(1+e_2)\cdot$ $\cdot(1+e_3)$. Den Grad von

$$a^2 = 2e_3(e_o+e_1+e_2)(e_o e_1+e_o e_2+e_1 e_2)+e_3^2(e_o+e_1+e_2)^2$$

kann man entweder direkt ausrechnen, oder die Projektion $\pi\colon X^4 \longrightarrow X^3$ auf die ersten Faktoren benutzen. Es ist

$$\pi_*(e_3) = 3-d$$

$$\pi_*(d_{i3}d_{j3}) = \begin{cases} d'_{ij} & o\leq i<j\leq 2 \\ -\pi_i^*(k_X) & o\leq i=j\leq 2 \end{cases}$$

$$\pi_*(e_3^2) = 2\rho_2^*(c_1(J_2))-(\pi_o^*(k_X)+\pi_1^*(k_X)+\pi_2^*(k_X)),$$

wo $\pi_i\colon X^3 \longrightarrow X$ die Projektion auf den i-ten Faktor, $k_X \in A^1(X)$ die kanonische Klasse und $d'_{ij} \in A^1(X^3)$ eine Diagonale ist. Es ist

$$-c_1(J_2)c_2(J_2) = \Omega(n-4,n-2,n;P)+\Omega(n-3,n-2,n-1;P),$$

$$-c_1(J_2)^3 = \Omega(n-5,n-1,n;P)+2\Omega(n-4,n-2,n;P)+\Omega(n-3,n-2,n-1;P).$$

Die Projektionsformel liefert

$$\int_{X^4} a^2 = \int_{X^3} 2(3-d)\rho_2^*(c_1(J_2)c_2(J_2))$$

$$+ \int_{X^3} (2\rho_2^*(c_1(J_2))-(\pi_o^*(k_X)+\pi_1^*(k_X)+\pi_2^*(k_X)))\rho_2^*(c_1(J_2))^2$$

$$= \int_{X^3} \rho_2^*((2d-10)\Omega(n-4,n-2,n;P)+(2d-8)\Omega(n-3,n-2,n-1;P) -2\Omega(n-5,n-1,n;P))$$

$$- \int_{X^3} (\pi_o^*(k_X)+\pi_1^*(k_X)+\pi_2^*(k_X))\rho_2^*(c_1(J_2))^2$$

$$= (2d-10)6(\mu(2)-\lambda(2))+(2d-8)6\lambda(2)-2\cdot 6\alpha(2)-3k(2d^2-8d-k+6)$$

Also ist

$$q = \frac{1}{24}\left(\int_{X^4} a^2 - 24\,\mu(3)\right)$$

$$= \frac{1}{24}(2d^4-24d^3+94d^2-120d-6d^2k+42dk-66k+3k^2)$$

$$= \frac{1}{12}(d-2)(d-3)^2(d-4)-\frac{g}{2}(d^2-7d+13-g).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkungen 5.7.1. Le Barz [13] hat die Gültigkeit der Cayley-Formeln für eine Klasse von Raumkurven über $\mathbb{C}$ gezeigt, deren Elemente er "allgemein" nennt.

5.7.2. Die Einbettungen $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ von Satz 5.7 sind generisch in folgendem Sinn: Sei X eine Kurve mit Geschlecht g. Die Einbettungen $X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ mit Grad d werden durch

$$\{(D,S):\ D\in Div_d \ \text{ und } \ S\in G(3,|D|) \ \text{ "very ample"}\}$$

parametrisiert. Zu einem solchen (D,S) gehört eine Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ mit $n = \dim|D|$, und $X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ entsteht hieraus durch Projektion. Wenn $d\geq 2g+3$ ist, so ist $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ 3-krumm nach Satz 1.7.(i), und wenn $d>g+6$ ist, so ist $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ r-krumm für ein generisches D nach 1.7.(iv). Insbesondere hat jede Kurve eine Einbettung in $\mathbb{P}^3$ von Grad d, die Projektion einer 3-krummen Einbettung ist, wenn $d\geq\min\{2g+3,g+7\}$ ist.

5.7.3 Der Beweis von Satz 5.7 lässt sich natürlich leicht verallgemeinern. Sei zum Beispiel $Y \subseteq \mathbb{P}^4$ eine (generische) Projektion einer 2-krummen Kurve X in einem $\mathbb{P}^n$. Dann erhält man für die Anzahl t der Geraden, die Y in drei Punkten schneiden, den wohlbekannten Ausdruck [1]:

$$t = \frac{1}{3!} \int_{X^3} \rho_2^* \, \Omega(n-5, n-1, n; \mathbb{P}^n) = \alpha(2)$$

$$= \frac{d-4}{6}(d(d-5)-6(g-1))$$

Literatur

[1] L. Berzolari, Sulle secanti multiple di una curva algebrica dello spazio a tre o quattro dimensioni, Rend. Circ. mat. Palermo, 9 (1895), 186-197

[2] G. Canuto, Associated curves and Plücker formulas in Grassmannians, Invent. Math., 53 (1979), 77-90

[3] G. Castelnuovo, Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche, Rend. Circ. Mat. Palermo, 3 (1889), 27-37

[4] A. Cayley, On skew surfaces, otherwise scrolls, London Phil. Trans., 153 (1863), 453-483 (= Mathematical papers 5, Cambridge (1892), 168-200)

[5] Enzyklopädie der math. Wissenschaften, K. Rohn und L. Berzolari: Algebraische Raumkurven und abwickelbare Flächen (III.C.9), Leipzig (1921-1928), 1229-1436

[6] G. Z. Giambelli, Risoluzione del problema generale numerativo, Mem. Acc. Torino, 59 (1908), 433-508

[7] P. Griffiths und J. Harris, Principles of algebraic geometry, John Wiley, New York, 1978

[8] R. Hartshorne, Algebraic geometry, Springer Verlag, 1977

[9] S. Kleiman, The transversality of a general translate, Comp. Math., 28 (1974), 287-297

[10] S. Kleiman und D. Laksov, Another proof of the existence of special divisors, Acta Math., 132 (1974), 163-176

[11] D. Laksov, Algebraic cycles on Grassmann varieties, Adv. Math., 9 (1972), 267-295

[12] D. Laksov, Secant bundles and Todd's formula for the double points of maps into P^n, Proc. London Math. Soc., 37 (1978), 120-142

[13] P. Le Barz, Gêometrie énumérative pour les multisécantes, in: Variétés analytiques compactes, Nice 1977, Springer Lecture Notes 683, 116-167

[14] C. A. M. Peters und J. Simonis, A secant formula, Quart. J. Math. Oxford, 27 (1976), 181-189

[15] F. Severi, Sugli spazi plurisecanti di una semplice infinità razionale di spazi, Rend. Lincei, 11 (1902), 52-56

[16] I. R. Shafarevitch, Basic algebraic geometry, Springer Verlag, 1974

[17] A. Tanturri, Ricerche sugli spazi plurisecanti di una curva algebrica, Ann. di Mat., 4(1900), 67-121